パリティ物理学コース

クローズアップ

牧 二郎 編

トポロジーと物理

倉辻比呂志 著

丸善株式会社

パリティ物理学コース　クローズアップ

発刊にあたって

物理学という学問は，近代科学の柱として古い歴史をもっています．特に20世紀に入ってからの物理学の大きな発展は，先端技術を切り拓き，自然科学の他の分野にも深い影響を及ぼしてきました．専門的知識の最前線としての物理学を習得しようとする人々は近年ますます増え，物理学は，これまでにない広い範囲に，その基本的な知識や方法が普及されていく時代を迎えています．

パリティ物理学コースは，このような状況の中で，物理学を必要とする多岐にわたる読者の要望に，新たな構想をもって応えるものであり，広範な物理学分野を多面的に学習することを可能にするコースです．同一のテーマであっても性格の違うものを複数そろえ，読者自身が自分に最適のコースを自由に準備できるように構成されています．

本“クローズアップ”は，この主コースの中で，わかりにくいところ，間違いやすいところ，奥深いポイント，また物理的・哲学的・教育的・文学的な香りのする問題等を適宜選んで，深く掘り下げて解説します．現在脚光をあびている先端的なテーマのほか，科学史的あるいは教育的見地からその必要性が認められるテーマ等も随時加えられていきます．各テーマについての，踏み込んだ記述は，物理学の魅力をいっそう深めて

くれることでしょう．

一つひとつのテーマは新鮮な話題に満ち，読物的色彩に富むシリーズとなります．読者は，物理学を学習していく中で興味を抱くさまざまな話題を，“クローズアップ”の中にいくつも見つけ出すことができるに違いありません．“クローズアップ”が，主コースとともに多くの読者に受け入れられ，広範な分野の方々が物理学を習得する一助となれば幸いです．

牧　二郎
長岡洋介
大槻義彦

まえがき

トポロジーという学問は，数学の世界でも比較的新しいものである．19 世紀に，ポアンカレが天体の軌道の全体的な振舞いを記述するために創始したのが始まりであるといわれており，一大発展を遂げ数学の巨大な分野となったのは 20 世紀半ばである．専門家以外の人にとって，トポロジーという言葉から連想されることは，非常に抽象的なものという印象であろう．一つ一つの幾何学的対象（つまり図形）ではなくて，対象全体に共通する特徴を捉えて考察するというのはいかにも現代風である．

一方，目を物理学に向けるとトポロジー的概念が直接に物理現象に関係するということは一見して明らかではない．こういう高度な数学的概念が顔を出す現象もどちらかというと直感的に捉え難いものであろう．物理における抽象的な概念といえば量子力学における状態ベクトル，あるいは波動関数が最たるものである．波動関数の概念は古典力学的な常識から予測し難い様々な逆説的現象をもたらす．例えば，電子波の干渉，トンネル効果などである．そういう直感的描像と相入れない現象にトポロジー的概念が登場してきても不思議ではないかも知れない．最近の物理学に目を移すと，過去十数年の理論物理の発展のなかで，量子的現象を中心としてトポロジー的概念の有効性は飛

躍的に認識されたといえる．このような背景のものに，この小冊子では主として量子物理における現象を例にとり，その現象を理解・整理するのに際してトポロジー的概念が有効であることを示すことにした．具体的には，ディラックモノポール，幾何学的位相（ベリーの位相），準古典量子化，量子渦，場の理論におけるトポロジー的対象をとりあげてみた．これらの題目は，すでに他の成書に見られるかも知れないが，本書ではできる限り相互の有機的関連を表に出すように努めた．

以上のような意図のものに書き上げて，読み返してみると，トポロジーというタイトルが十分生かされていないのではないかと恐れる．これは，筆者がこのようなむずかしい題目に取り組むのに力不足であったことによるが，この点に関しては，読者の率直なる批判を仰ぎたい．また，多くの点で思い違いや誤解があるかも知れない．

本書を執筆するに際し多くの方々のお世話になった．本コースの編者の牧二郎教授には閲覧の労をいただき，編集部の桑原輝明氏，および佐久間弘子氏には執筆に際して叱咤激励をいただいた．奥田克己氏には，構成の段階で数々の貴重なるコメント，表現上の不備を指摘いただき，本書が最終的に体裁を整えることができた．ここに厚く御礼を申し上げたい．

1995年2月　　　琵琶湖の見える部屋にて

倉 辻 比 呂 志

目　　次

1　トポロジーと物理現象

A：“トポロジーと物理”ということですが，具体的にはどのような内容をさすのでしょうか？

B：私自身も正直なところ明確なものを描いているわけではないのですが，しいていえば物理にあらわれる広い意味での“場の方程式”に関連する現象をトポロジー的な概念でとらえられないかというのが基本的な構想です．

A：トポロジーというのは図形全体としての共通の性質を把握するということのようです．例えば円と長方形は，見た目には明らかに異なるが，長方形を変形して円にすることが可能です．変形の操作は連続写像という操作によって実現されます．そうすると円と長方形は同じ部類に属するといえます（数学的にはこれら2つの図形は同相とよばれる）．一方，3次元空間中の2次元球面はドーナツ面(トーラス)と同類ではありません．直感的にも連続的に変形して球面をドーナツにはできないですから．

B：かなり詳しいですね．物理的な観点からみると，まず，質点の軌道運動が最も単純で美しいものですが，トポロジー的な情報を担うにはある種の複雑さが必要です．質点の力学から連続系の力学へ移行すると途端に無限の多様性が生じます．いわゆる“場”の概念です．場の考えは，素朴にいえば空間の各々の点に

おいてある特徴を付与された物理量が配置されたものということができます．場の状況を図示すると“パターン”ができます．このパターンを全体としてとらえるために，トポロジーのアイデアを利用しようというわけです．

A：……

B：場の概念が最初に有効性を発揮したのは，流体における“流れの場”でしょう．これは，ベクトル関数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ と書けます．流体の運動を観察して気がつくことは流れの中でとくに目立つ場所があります．すなわち，渦です．渦現象はトポロジーが顕在化する最も簡単なものといってよいでしょう．渦を特徴づける量として，つぎの線積分

$$\oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \Gamma(C) \tag{1.1}$$

が考えられます．ただし，積分は渦を囲む閉曲線に対して計算され，この積分量は循環 (circulation) とよばれます．詳しい説明は，次章で与えますが，この線積分は，ストークスの定理によって

$$\Gamma(C) = \int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.2}$$

と書けます．循環は渦を特徴づける積分不変量であって，これをトポロジー的とよべる理由は，Γ が積分経路の具体的な形によらないで経路全体にあるクラス分けをしたときのクラスにのみ依存するということからくるわけです．

A：そういう積分で表したものが，トポロジーと結びつくというのは直感に訴えませんが？

B：そうですね．トポロジー的な不変量としての意味が深くなるのは量子力学的効果を考えにいれたときでしょうね．古典物理学ではこの積分量は当然連続的な値を取りうるのであるが，量子力学においては，プランク定数を単位とした整数で特徴づけられます（これは一般に量子数とよばれる）．そこでは，問題とする場は量子力学的な波動関数（あるいは一般化された波動関数というべきもの）で与えられます．

A：量子力学が流体力学と関係してくるのですか？

B：そうです．流体といっても通常のものとはだいぶ意味がちがいますがね．

A：他に例はありませんか？

B：電磁気でのいわゆるディラックのモノポールが量子力学でのトポロジー現象の最も古くかつ，重要なものといえると思います．単独の磁荷は自然界に存在しないのですが，ディラックがねらったのは，モノポールそのものを見つけようというのはなくて，もっと深遠なものであったようです．つまり，電荷がなぜ，e (素電荷) の整数倍であるのかを説明するのに量子化された自由磁荷があればよいといったわけです．

A：……

B：タネあかしをしておきますと，以下の話の内容の主要な部分はこのディラックモノポールのアイデアから派生してくる問題を扱っていると思ってもらってよいでしょう．

A：なんだか，面白そうでもあるし，ややこしそうでもありますが．最後まで落後せずに読み通せるでしょうか？

B：予備知識は全然いらないというわけには行きませんが，教養課程程度の数学と学部3年生の前半程度の物理の知識で読めるように努力したつもりです．最後の章は大学院生が対象になるようなものですが，それほど難しく書いているわけではありません．

2 積分公式

この章ではトポロジー的な特性量に関係すると思われる積分公式について簡単に説明しておく．詳しい議論については巻末の文献を参照されたい．

2.1 平面上の積分公式

トポロジーに関連する大局的な情報を担う量は一般に積分で与えられる．そのことを例示するために，1 変数 x の関数 $\phi(x)$ に対して，次のような積分を考える (x の変域は，$-\infty \le x \le +\infty$ とする)．

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \tag{2.1}$$

これは，ただちに計算されて境界値の差だけで決定される．

$$N = \int d\phi = \phi(+\infty) - \phi(-\infty)$$

このことは，有限領域での $\phi(x)$ の形を適当に変形しても積分値に影響を与えないことを示している．

　さて，以下において場の量に関係する積分の基本的な事項を述べる．まず，2 変数の場合からはじめよう．一般に

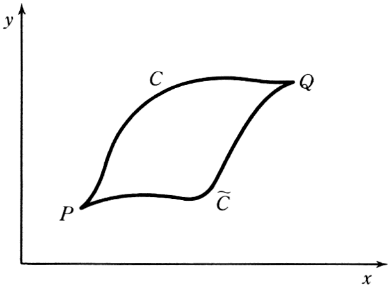


図 2.1　2 つの経路 C_1, C_2 に沿った積分値は異なる.

$$\omega \equiv Adx + Bdy \tag{2.2}$$

と書かれたものは微分形式とよばれる．この微分形式を積分したものを考えてみる．つまり,

$$I = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} Adx + Bdy \tag{2.3}$$

ここで，積分は (x, y) 平面の 2 点 P と Q を結ぶ曲線に沿って行われる．すると，その値は一般に曲線の形に依存する．特に，二つの点が一致する場合，すなわち閉曲線に沿った積分を考えると，これは

$$I = \int_{\mathrm{P}(\tilde{C})}^{\mathrm{Q}} \omega + \int_{\mathrm{Q}(C)}^{\mathrm{P}} \omega = \int_{\mathrm{P}(\tilde{C})}^{\mathrm{Q}} \omega - \int_{\mathrm{P}(C)}^{\mathrm{Q}} \omega$$

のように書き直される．これから，二つの積分は, ともに始点および終点は同じであるが経路 C および, $\tilde{C}$ が異なると，それらの値も異なることがわかる (図 2.1)．したがって，閉曲線に沿った積分は一般に 0 でない．それでは，式 (2.1) が経路に依存しない，言い替えると閉経路に沿った積分が 0 になるのはどのようなときであろうか？

これを説明するために，閉経路 Cに沿った積分を

$$I(C) = \oint_C \omega \tag{2.4}$$

と書こう．この線積分は次のような面積分に書き直される．

$$\oint_C \omega = \int\int_S \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dxdy \tag{2.5}$$

これはグリーンの公式とよばれるものである．そこで，この面積分の被積分関数が 0 になれば閉経路に沿った積分も 0 になることは明らかである．すなわち，

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

が成立する．この条件は微分形式 (2.2) に対する積分可能条件とよばれる式である．このとき，ω は完全微分形式とよばれる．条件 (2.2) は十分条件である．つまり，式 (2.6) が満たされていても積分値は一般に 0 になるとは限らない．積分が 0 になるためには，積分領域に条件を課しておけばよい．すなわち，積分領域内で，ωの特異点はないという条件を課しておくのである．もしこの条件が満たされないならば，閉経路に沿った積分は 0 でなくなる可能性がある．実際に次のような微分形式を考えよう．

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{2.7}$$

これは，(x, y) 平面上原点を除いたすべての定義されており，原点 (x, y) だけが特異点となっている．式 (2.6) の条件が原点を除いて満たされていることは容易に確かめられる．したがって，式 (2.7) を原点を含まない任意の閉曲線上で積分すると 0 になることがわかる．実は，この微分形式は，

$$F = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta \tag{2.8}$$

の微分として導かれるものである．θ はこの表式からわかるように，(x, y) 平面を極座標を用いて表したときの極角を表しており，条件 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を課しておく．ここで原点を除外しなければならないことに注意しよう．すなわち，原点を除い等式

$$\omega = dF \tag{2.9}$$

が成立する．積分経路が原点を 1 回だけまわる場合を考えると，ω の一周積分は，



図 2.2　(a) 領域は単連結である．つまり，任意の 2 点を結ぶ曲線はお互いに連続的に移り変われる．(b) 単連結ではない．斜線を引いた部分が障害になって曲線は互いに移り変われない．

$$\oint_C \omega = 2\pi \tag{2.10}$$

となる．このとき，この積分値は閉曲線の形によらないことが注目すべき点である．閉曲線に対する制約として，原点のまわりを“1 回”だけまわればよいのである．

[問]：閉曲線として，原点を囲む長方形の場合にこのことを確かめよ．

そういう意味で，この例は物理現象におけるトポロジー的な情報を反映するヒナ型となっている．つまり，微分形式を定義するベクトル場

$$v_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{2.11}$$

の原点が特異点になっていて，積分はこの特異点一点だけで値をかせいでいるといえる．のちにみるように，(x, y) 平面から一点を除いたものはトポロジー的に“単連結”でないという性質で特徴づけられる．ここで，平面のある領域が単連結とは，そのなかの 2 点を結ぶ曲線が，つねに互いに連続的に変形できることを意味する．

上の例をもう少し一般的な点から眺めてみよう．(x, y) 平面を極座標で表すと原点の特異性はもっとはっきりする．極座標を用いて複素数

$$z = re^{i\theta} = x + iy \tag{2.12}$$

を導入することにより，(x, y) 平面は複素平面とみなせる．そこで，これまでやってきた積分公式を複素平面の上で実行することを考える．つまり，複素積分を考えようというわけである．初めに複素関数論の入り口を復習しておこう．いろいろの表現の仕方があるが，まず，z の関数 $f(z)$ が正則であるとは，ある点 z において，導関数が z にどのように近づこうが一定値をとるということである．これを式で表現すると，$f(z)$ の実部を $u(x, y)$，虚部を $v(x, y)$ とすれば，その間に

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.13}$$

なる関係がある．これはコーシー-リーマンの関係式である．微分の関係

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.14}$$

を利用すると，

$$2\frac{df}{d\bar{z}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.15}$$

すなわち，$f(z)$ は，z の関数であって複素共役 $\bar{z}$ を含まないことを示す．

さて，複素平面内で閉曲線 C に沿った正則関数の積分を関数の実部，虚部を用いて次のように定義できる．

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) \tag{2.16}$$

特に，$f(z)$ が正則な領域のなかでの閉曲線で，それによって囲まれる領域 S が単連結の場合に式 (2.16) の右辺は

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \tag{2.17}$$

となり，コーシー-リーマンの関係式より 0 になる．すなわち，

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{2.18}$$

これがコーシーの基本定理である．ここで重要なことは，囲まれた領域 S が単連結でありさえすれば，C はまったく任意にと

れるということである．これは基本定理のトポロジー的性格を物語っている．

話を特異点をもった微分形式の積分に戻すと，式 (2.11) で与えられるベクトル場は，複素数で表せば，

$$w = \frac{1}{z} \tag{2.19}$$

となる．この関数は $z = 0$ で 1 次の極をもつ． この関数を原点を "1 回だけ正に向きにまわる" 閉曲線に沿って積分してみる．

$$\Gamma = \oint_C \frac{dz}{z} \tag{2.20}$$

これは，極座標を用いることにより容易に

$$\Gamma = \oint_C \frac{dz}{z} = i \oint_C d\theta = 2\pi i \tag{2.21}$$

となることがわかる．これは留数定理とよばれているものである．つまり，留数定理とは,物理的にいえば，式 (2.11) で与えらるベクトル場の線積分にほかならない．ここで，ちょうど 1 回だけ特異点のまわりを回転するということが重要である．つまり，閉曲線は全くは勝手なものはとれないわけである．式 (2.21) を使えば，コーシーの積分公式が導かれる．すなわち，$f(z)$ を考えている領域で正則とすると，$z = a$ をこの領域内の点として，a を，同じく正の向きに 1 回だけ回転するような閉曲線に対して，等式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz \tag{2.22}$$

が成立するというものである．

上に導いた積分公式は，閉曲線 C の点 $z = a$ のまわり方によっているというところが，ポイントになっている．つまり，曲線の具体的な形にはよらないが，ちょうど 1 回だけ正の向き (反時計回りに) まわるというのが要点である．すなわち，もし，原点のまわりを，時計まわりに n 回まわったとすると，公式 (2.22) は，ちょうど n 倍される．まわる回数を，n によって識別でき

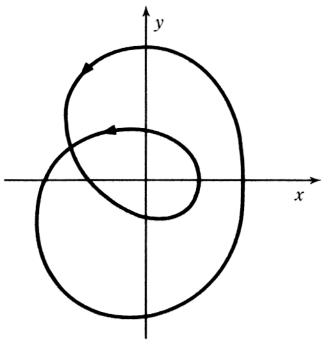


図 2.3 積分定理．この図では原点のまわりを 2 回まわる．

ることを示している．この事実は閉曲線に関する基本群 (曲線に対するホモトピー群) というものと関連しているのであるが，これについては 6 章において詳しく議論する．

［問］：もし，閉曲線が原点のまわりを時計まわりに n 回，まわるものとすれば，どうなるか．

2.2 ストークスの定理とガウスの定理

1 章において，2 変数に関する積分，特に，平面上での閉曲線に沿った積分をとりあげたが，物理現象一般は 3 次元空間内で (時間をふくめれば 4 次元であるが，時間は別に考える) 生起するものであるから，線積分も空間曲線に拡張しておく必要がある．いま，3 次元空間の各点において定義されたベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (a_1(\boldsymbol{r}), a_2(\boldsymbol{r}), a_3(\boldsymbol{r}))$ を考えて，これの空間曲線 C に沿っての積分を次のように定義する．

$$I(C) = \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_C (a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz)$$

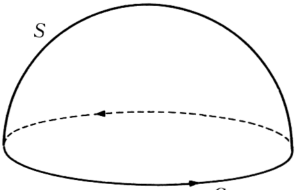


図 2.4　閉曲線とそれを囲む曲面.

特に，C が閉曲線の場合にはグリーンの公式と同じく面積分に変形できる．

$$\oint_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{curl}\, \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.23}$$

のようになる．これがストークスの定理である．ベクトル場の"回転"$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{a}$ を成分で表すと

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z},\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x},\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \tag{2.24}$$

で与えられる．式 (2.23) の積分において，ベクトル $d\boldsymbol{S}$ はいわゆる軸性ベクトルというもので，大きさが微小面積要素で与えられ，方向がそれに垂直で右ネジの進方向をとるものとする．x, y, z 成分で書けば，形式的に

$$d\boldsymbol{S} = (dydz,\ dzdx,\ dxdy) \tag{2.25}$$

と書ける．ただし，$dxdy$ などの"積"については，それは，微分"dx"と微分"dy"の掛け算という意味ではなく，外積という意味をもっていることに注意しておこう (2.4 節参照)．一般に，式 (2.23) の右辺の形のベクトル関数の積分

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.26}$$

を曲面 S を貫く $\boldsymbol{B}$ のフラックスとよばれる．

例として，流体の速度場 $\boldsymbol{v}$ を考えよう．ここで，流れが時間によらない，つまり，定常流を仮定する．流れを大局的にとら

える量として循環 (circulation) とよばれる量がある．それは流体中の閉曲線に沿った速度場の線積分

$$I(C) = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.27}$$

によって定義される．ストークスの定理により，

$$I(C) = \int \operatorname{curl} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.28}$$

となる．ここで，

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{curl} \boldsymbol{v} \tag{2.29}$$

は“渦度”とよばれる量である．

ストークスの定理を次元を一つあげてみよう．ストークスの定理は閉曲線に沿った線積分を閉曲線を縁とする面上での積分になおすのであるが，これを閉曲面上にわたる面積分をそれを“縁”とする3次元領域にわたる積分になおすのである．それは“ガウスの定理”として知られているものである．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の閉曲面 Sから湧き出るフラックスが

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, dV \tag{2.30}$$

のように書き直される．これがガウスの定理である．$\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ は発散とよばれる．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.31}$$

で定義される．もしこの発散が0でなければ，閉曲面からベクトル場に付随する物理量の実質的な湧き出しがあることになる．例えば，流体力学で基本的な量である質量の流れ $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ (ここで，ρ は質量密度，$\boldsymbol{v}$ は流体速度を表す) の場合には閉曲面を通じて質量の正味の変化が起こる．

2.3 2次元の循環と渦

前節において流体の循環，渦度を定義した．流体は一般に粘性をもつが，いまはそれを無視することにする．つまり，理想流

体を考える．渦度が0の場合 ($\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = 0$ で与えられる場合) は，式 (2.29) より速度はあるスカラー関数 ϕ の勾配 (gradient) で表せる．

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \tag{2.32}$$

ここで，$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ に注意する．このスカラー関数をポテンシャル関数とよぶ．しかし，現実の流体では渦が多少ともできるのがふつうである．したがって，ポテンシャル関数はいくつかの点で特異点をもつことは起こり得る．あるいは，多価関数となりうる．ポテンシャルが一定の面 (線) は，いわゆる等ポテンシャル面を形成するが，速度場はこの面の法線の方向を向いている．

流れを観察するとわかるように，渦はその中心によって特徴づけられることがわかる．中心では流体を構成している物質の密度が希薄になっている．そこで，特に2次元的な流れを考えてみよう．すると，

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.33}$$

となる．ここで，天下り的であるが

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.34}$$

となるような別のポテンシャル関数 ψ を定義する．つまり，$\psi =$ 一定という曲線は，$\phi =$一定という曲線に直交する．このことは，$\psi =$ 一定という曲線は，いわゆる流線になる[1]．したがって，ϕ と ψ の間には，次の関係がある．

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.35}$$

この式は，ϕ,ψ を実部，虚部にもつ複素関数に対するコーシー-リーマンの関係式である．このとき，独立変数は $z = x + iy$ であり，複素関数は

---

[1]流線を決める方程式は $v_y dx - v_x dy = 0$ を満たす．

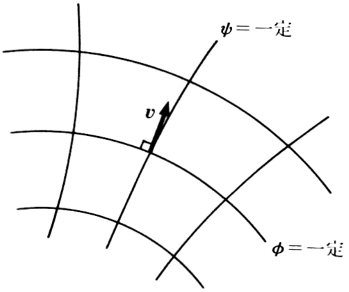


図 2.5　ポテンシャルϕ,ψの関係.

$$w=\phi+i\psi \tag{2.36}$$

で与えられる．w は複素速度ポテンシャルとよばれる．この関数の複素関数的微分は

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial\phi}{\partial x}-i\frac{\partial\phi}{\partial y}\\&=v_x-iv_y\end{aligned} \tag{2.37}$$

と書かれる．そこで，全微分の閉曲線 C に沿った積分

$$\begin{aligned}\Gamma(C)&=\oint_C dw\\&=\oint_C(v_x-iv_y)(dx+idy)\\&=\oint_C(v_xdx+v_ydy)+i\oint_C(v_xdy-v_ydx)\end{aligned} \tag{2.38}$$

を考えると，第1項は，ちょうど，C のまわりの循環を表している．一方，第2項はグリーンの公式を使えば，

$$\int_S\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdy \tag{2.39}$$

これは，速度場の発散の積分，つまり，C から流れ出る質量流に等しい．左辺の複素積分の値は微分 dw/dz の極からの留数に等しい．したがって

$$\Gamma(C) = 2\pi i \sum_k \alpha_k \tag{2.40}$$

ここで，α_k は k 番目の 1 次極からの留数である．これは積分路を適当に変形させても値は変化しないという意味で流れに付随するトポロジー的不変量 (位相不変量) といってもよいであろう．

[例]：次のような複素速度ポテンシャル $w = -i\mu \log z$ を考える．μ は適当な実数である．対数関数は無限多価関数の典型である．

$$w' = -\frac{i\mu}{z} \tag{2.41}$$

であるから原点が 1 次の極になっている．したがって，

$$\Gamma(C) = 2\pi\mu \tag{2.42}$$

二つのポテンシャルは極座標表示 $z = r\exp[i\theta]$ を使うと，

$$\phi = \mu\theta, \qquad \psi = -\mu \log r \tag{2.43}$$

となる (図 2.6).

$r =$ 一定の曲線と，$\theta =$ 一定の曲線は直交している．速度場は

$$\boldsymbol{v} = \mu\nabla\theta = \left(\frac{-\mu y}{r^2}, \frac{\mu x}{r^2}\right) \tag{2.44}$$

となって，$\psi =$ 一定の曲線の接線になっている．つまり，原点を中心とする渦を形成している．これから予想されるように，質量の流れ (発散) は 0 になって，Γ は循環からの寄与のみとなる．すなわち，

$$\Gamma(C) = \mu \oint_C \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{s} = 2\pi\mu \tag{2.45}$$

渦度は，

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) = 2\pi\mu\delta(\boldsymbol{x}) \tag{2.46}$$

となる．ここで，$\delta(\boldsymbol{x})$ はディラックのデルタ関数である．これは渦が原点に集中していることを示している．

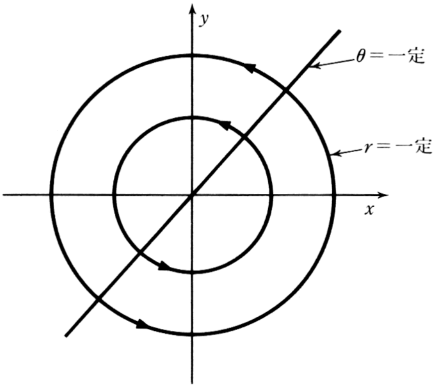


図 2.6　対数関数で与えられるポテンシャル関数 w の等高線．速度場は，$\theta=$ 一定に垂直な曲線，つまり，$r=$ 一定の円周の接線の方向を向く．

2.4　微分形式と外微分

以下の章で，微分形式や，それの微分 (外微分) 演算がしばしば使われるので，ここで，その定義をまとめておく．

1 次の微分形式

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \tag{2.47}$$

を積分すると，ストークスの定理によって 2 次の微分形式の積分に直され，$dxdy$ のような積があらわれたが，ここで改めて，微分形式の "積" をきちんと定義しておく必要がある．これはベクトルの外積をまねて実現される．つまり，3 次元空間の単位ベクトルを，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ とおくと，それらにはよく知られた関係

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i \tag{2.48}$$

が成り立つ．つまり，積の順序をかえると符号が替わる．この特徴を，微分にあてはめるのである．つまり，二つの微分 dx, dy に対して，外積を

$$dx \wedge dy \tag{2.49}$$

によって定義し，順序を交換したとき，

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \tag{2.50}$$

のように符号が替わるように約束する．すると，二つの微分形式の外積は，二つのベクトルの外積と同じく，

$$\omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3,$$

$$\omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3$$

に対して，

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (A_1 B_2 - B_1 A_2) dx_1 \wedge dx_2 + (A_2 B_3 - B_2 A_3) dx_2 \wedge dx_3 + (A_3 B_1 - B_3 A_1) dx_3 \wedge dx_1 \tag{2.51}$$

ように計算される．

次に，微分形式の外微分を定義する．もっとも簡単な場合，$\omega = Adx$ (A は x の関数) に対する外微分は，

$$d\omega = d(Adx) = dA \wedge dx + A \wedge d(dx) \tag{2.52}$$

となる．これは，要するに，積の微分をとることの拡張にほかならない．ここで，$ddx = 0$ と約束する．3 次元の場合には，

$$d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) = dA_1 \wedge dx_1 + dA_2 \wedge dx_2 + dA_3 \wedge dx_3 \tag{2.53}$$

となり，各々の項は，

$$dA_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_j \tag{2.54}$$

なるので，

$$d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) = -\sum_{(i,j)=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \tag{2.55}$$

で与えられる．これらは，一般の次元に拡張できるが，それは付録 A.1 にまとめておいた．

3 ディラックモノポール：電磁現象のトポロジー

この章では，量子力学と電磁場を結合させたときに生じる量子化されたモノポール (ディラックモノポール) について述べる．ディラックモノポールによってトポロジー的概念が物理学において初めて登場した．

3.1 荷電粒子のシュレーディンガー方程式

はじめに質点の量子力学の復習から始めよう．量子力学においては質点の状態は複素数値の波動関数 $\psi(x,t)$ によって表される．これの絶対値 $|\psi(x,t)|^2$ が，時刻 t において，空間の点 x に粒子が見いだされる確率密度を与える．質点の力学を記述するハミルトニアンを H とすると ψ はシュレディンガー方程式[1]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{3.1}$$

によって記述される．特に，$-e$ の電荷をもった荷電粒子の電磁場中のハミルトニアンは，

[1] 以下では非相対論的量子力学を考えている．

$$H = \frac{[\boldsymbol{p} + (e/c)\boldsymbol{A}]^2}{2m} - e\phi \tag{3.2}$$

で与えられるが，これは，形式的に，

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}, \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \tag{3.3}$$

なる変換を，自由粒子に対するハミルトアンに施して得られる．以下では，スカラーポテンシャル $\phi = 0$ の場合に話をかぎる．ここで，シュレーディンガー方程式にベクトルポテンシャルが現れることが本質的である．このことは，量子力学においては，電磁場よりもベクトルポテンシャルが役割を演ずるということを暗示している．特に，ベクトルポテンシャルが時間に依存しない場合を考えることにする．まず，式 (3.1) の解を

$$\psi_{\mathrm{EM}} = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right] \tag{3.4}$$

とおいてみる．これを式 (3.1) に代入すると，ψ_0 は，

$$\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} + \nabla S\right)^2 \psi_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0 \tag{3.5}$$

を満たすことがわかる．そこで，S が $\nabla S = -(e/c)\boldsymbol{A}$ となるように選べば，ψ_0 は自由粒子の方程式を満たす．これから，S は

$$S = -\frac{e}{c}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.6}$$

となり

$$\psi_{\mathrm{EM}} = \exp\left[-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}\right]\psi_0 \tag{3.7}$$

のように形式的に解ける．ここで，積分は空間のある点 P_0 から点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ までの経路に沿って計算されるが，積分値は経路のとり方に依存する．結局，電磁場が存在する場合には形式的に，式 (3.7) と書ける．この式の指数関数の部分はディラック位相因子とよばれるものである．以下において，この位相因子に関する帰結についてみてみよう．

3.2 ディラック位相因子とディラックモノポール

通常，電磁気学を学ぶとき単独の磁荷 (磁気単極，あるいは単磁極) は存在しないとして教えられる．つまり，磁場の発散が常に 0 になる．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0 \tag{3.8}$$

しかし，これは，実験的な事実というべきであって，よく考えると，理論の枠自身からはその存在を拒絶する理由はないといえる．実際，ポアンカレなどは，単磁極の存在について考察をしたということである．それでは，単磁極の存在を仮定すれば，量子力学上どのようなことが起こるか？　それはいわゆるディラックモノポールのアイデアである．もっとも，ディラック自身の構想は量子力学に関するもっと根本的命題をつきつめるということにあってモノポールというのは，その一つの帰結といったほうが当たっているかもしれない．通常の量子力学では，電磁場ははじめから与えられたとしてハミルトニアンの中に組み入れてしまうのであるが，ディラックは電磁場の存在を仮定せずに量子力学の原理に忠実に状態ベクトル (波動関数) の一般的性質だけから出発した．

3.2.1 ディラック位相因子

ディラック位相因子は，別名，“非可積分的位相因子” ともよばれる．この位相の意味づけをディラック自身のアイデアに従って述べてみよう．時空点 (x, y, z, t) の関数で与えられる波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ で記述される粒子を考える．これは振幅と位相で表せる．

$$\psi = A\exp[i\alpha] \tag{3.9}$$

振幅 A はいつも任意の定数をかけることができるが，規格化条件を要求して，ψ の空間積分が 1 になるよう設定する．しか

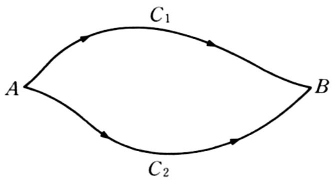


図 3.1　有限の距離だけはなれた 2 点 A, B の間の位相差はこれらの 2 点を結ぶ曲線の形に依存する.

し，位相 α のほうは一般に勝手にとれる自由度が残されている． α は，一般には，時空 (x, y, z, t) の関数であるから，この不定性は次のように説明できる．すなわち，

(i) 時空点における α そのものの値は異なる 2 点間の位相差のみが意味をもつであろう．言い替えると，各々の時空点でαの値は不定で 2 点間の差のみが確定した値を取り得るといえる．

(ii) さらに次のことを要求する．“異なる 2 点が有限に離れていれば，位相差はなお不定であって，非常に近い 2 点間でのみ位相差は確定した値をもつ.” 実際，これが数学的な意味での非可積分的位相であって，位相差は 2 点 A, B を結ぶ経路曲線のとり方によって異なる値をとりうる．これを，言い替えると，経路 C_1 に沿って A から B まで行き，次に経路 C_2 を逆にたどって B から A に戻ったときに，正味の位相差が生ずるともいえる．

(iii) ここで，位相の非可積分性が理論に支障を来さないための条件を調べておく必要がある．まず，$\psi^*\psi$ という量は位相に無関係であるから問題はない．また，二つの “異なる” 波動関数に対して，次のような積分

$$I(n, m) = \int \psi_n^* \psi_m dxdydz \tag{3.10}$$

を考える．これは重なり積分というもので，その絶対値が，状態 ψ_m において別の状態 ψ_n が見いだされる確率を与える．この積分の絶対値が確定した値をもつためには，少なくとも被積分関数 $\psi_n^*\psi_m$ の位相は任意の 2 点間で確定した値をとらなければならない．そうでないと，積分は計算されないからである．

このことは，特に，閉じた経路に沿って元の点に戻ったときに，$\psi_n^*\psi_m$ の位相変化は，0 でなければならないことを示唆している．言い替えれば，ψ_n の位相変化と ψ_m^* の位相変化とが，互いに打ち消し合う，あるいは，符号が異なるだけであるといえる．さらに，ψ_m と ψ_m^* の位相は (複素共役であることに注意して) 符号の違いだけであることを考慮すると，ψ_n と ψ_m のループに沿った位相変化は全く同じになるという帰結がでてくる．つまり，波動関数のラベル n, m に依らないのである．

上に述べたことを一般化すると，“任意の閉曲線に沿った波動関数の担う位相変化は，すべての波動関数に対して全く同じである”と主張できる．

さて，任意の閉曲線のまわりでの位相変化がすべての波動関数に対して同じであるという要請はこの位相変化が量子的粒子の状態とは独立のものであることを暗示している．ということは，この位相は粒子の置かれている空間の環境 (“場 ”) に帰着されるべきものといえる．このことを考慮して，非可積分的位相因子を含んだ波動関数を

$$\psi = \tilde{\psi}\exp[i\beta] \tag{3.11}$$

と表そう．ここで，$\tilde{\psi}$ は通常の確定した位相をもつ部分で，β は不定な位相である． β は，(x, y, z, t) の一価の関数ではないが，(ii) より，その勾配 (gradient) の確定した関数であると仮定できる．すなわち，

$$a_x = \frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad a_0 = \frac{\partial\beta}{\partial t} \tag{3.12}$$

とおくと， $(a_x, a_y, a_z) = \boldsymbol{a}$ は，時空座標の確定した関数であるが，可積分条件

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{3.13}$$

は一般に満足しない (これが非可積分的位相因子いわれる由縁である)．位相変化は，次式のように $\boldsymbol{a}$の線積分で表せる．

$$\beta = \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.14}$$

この値は当然, $\tilde{\psi}$ によらない．式 (3.12) より，次の等式

$$-i\hbar\nabla\psi = e^{i\beta}(-i\hbar\nabla + \hbar\boldsymbol{a})\tilde{\psi},$$
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{i\beta}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hbar a_0)\tilde{\psi} \tag{3.15}$$

がでてくる．この式は，ψ が (4 元) 運動量演算子 $\boldsymbol{p}(\equiv -i\hbar\nabla), E(\equiv i\hbar\partial/\partial t)$ で表される自由粒子ハミルトニアン で記述されるシュレーディンガー方程式を満たすとき，$\tilde{\psi}$ は $\boldsymbol{p}, E$ を $\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{a}, E-\hbar a_0$ で置き換えたときの，シュレーディンガー方程式を満たすことを示している．言い替えれば，ψ は，次のように定義されるベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A} = \frac{c\hbar}{e}\boldsymbol{a}, \qquad A_0 = -\frac{c\hbar}{e}a_0 \tag{3.16}$$

中を運動する電荷 $-e$ をもつ荷電粒子に対する波動関数を与えるとみなすことができる．上でやったことをまとめると次のようになる．ψ は，常に同じシュレーディンガー方程式を満たすのである (今の場合は自由粒子)．ここで肝心なことは，場があろうがなかろうが同じ方程式を満たすということである．このような ψ は一般に通常の意味での解析的な関数によって表せないことは明らかである．そこで，その煽りとして非可積分的位相因子が現れるのである．この非可積分的位相因子を除いた部分 $\tilde{\psi}$ は，確定した位相をもち，通常の意味での電磁場中の波動関数を与えている．このようにみると式 (3.7) で形式的に与えた解の意味は次のようになる．式 (3.7) を

$$\psi_0 = \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}\right]\psi_{\mathrm{EM}} \tag{3.17}$$

と書き換えてみると，これはまさに，式 (3.11) に対応している．つまり，この ψ_0 に対応するものが，式 (3.11) の非可積分的位相因子をもった状態 ψ になっているのである．

位相 β は，

$$\beta = -\frac{e}{\hbar c}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}(A_x dx + A_y dy + A_z dz - \phi dt) \tag{3.18}$$

のように，時空点 P_0 から P までの経路に沿った積分で与えられる．これをストークスの定理により面積分に直すと，電磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ を

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{curl}\ \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla A_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.19}$$

定義できることに注意しよう．

以上が，ディラックの位相に関するディラック自身のオリジナルなアイデアをほぼ忠実に再現したものである．しかし，読者は奇妙な感じを抱いたのではなかろうか．つまり，電磁場というのがいつのまにか“どこからか生じている”ということである．しかし，このアイデアは次章の幾何学的位相の先駆けとなるものである．

3.2.2 ゲージ場としてのベクトルポテンシャル

上でやったことをよく考えると，ベクトルポテンシャルが，電磁場よりも先に導入されたという事実に気がつく．この考えは，いわゆる，“ゲージ場”の考えである．古典電磁気ではベクトルポテンシャルは，電磁場を記述する補助的な役割という位置づけをされる．ところが，量子力学を最初に認めれば，このようにベクトルポテンシャルが最初に導入されてしまう．そこで，ベクトルポテンシャルの方を“基本的な場”(つまり，ゲージ場)であって，電磁場はそこから導かれるものであるという考えが現在では一般的に認められつつある．

ゲージ場を特徴づけるものはゲージ変換である．これは，いまの場合ほとんど，自明的なものとしてでてくる．つまり，式(3.11) の非可積分的位相因子 $\exp[i\beta(x)]$ に別の空間 (および時間) に依存する位相因子 $\exp[i\alpha(x)]$ をかけると，ベクトルポテンシャルは式 (3.12)，(3.16) より，

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \frac{\hbar c}{e}\nabla\alpha \tag{3.20}$$

なる変換をうけることはただちにわかる．同時に，この変換によって，電磁場$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$は不変であることもすぐにわかる．というわけで，ディラックの非可積分的位相から直接的にゲージ場が導入できるが，現代的なゲージ場の定義はより間接的になされる．これを，一言でいうと次のようになる．ある場で記述される系が，大局的な，つまり空間の各点によらない変換(これを第1種ゲージ変換という)に対する不変性を具えていたとしよう．これを大域的ゲージ不変性とよぶ．しかしその不変性は局所的な，つまり空間の各点による変換(第2種ゲージ変換という)に対しては一般には保持されない．そこで，局所的にもゲージ不変性を保持させようとすると，特定の“場”が，必然的に導入されなければならない．このように要求される場をゲージ場とよぶのである．電磁場の場合には，位相変換に対する局所的ゲージ不変性で記述される．この位相変換の全体は群(group)をつくるので，群論の用語を使えば，U(1)ゲージ場とよばれる．さらに，複雑な場合，例えば，変換群が行列で記述される場合のゲージ場はヤン-ミルズ場とよばれる．本書はゲージ場の解説をするのが目的ではないので，ゲージ場に関する事項は付録にまとめてある．

3.2.3 量子化されたモノポール

上で述べたアイデアは，電磁場というものを非可積分的位相という形で量子力学のなかで再構成したことである．電磁場を再構成したという観点だけからならば，特に問題にするべきほどのことでもないともいえる．しかし，非可積分的位相のアイデアは非常に奇妙な帰結を導くことをディラックは示したのである．これが量子化されたモノポールのアイデアである．

まず，波動関数の位相には2πの整数倍だけの不定性があることに注意しよう．それは，$\exp[2n\pi i] = 1$だからである．言い替えれば，波動関数の閉曲線のまわりでの位相変化を単に電

磁場だけでは説明しきれない要素があるのである．このことをはっきりさせるために，はじめに，微小な閉曲線に沿った位相変化を考えよう．波動関数の連続性から，その微小曲線の内部に特異点がなければ，位相変化も微小であると直感的に考えてよい．これは任意の波動関数について当てはまる．言い替えれば，微小閉曲線のまわりの位相変化は微小であり 2π の整数倍のような不連続な変化は許されない．ところが，この法則が破れる場合がある．それは，波動関数の値が 0 となるところ，つまり，節 (ノード) となるところを微小閉曲線が内部に含む場合である．3 次元空間中のノードは曲線を形成する (ディラックはこれを nodal line とよんでいるが，適当な訳語がない) ことを説明しよう．波動関数は複素数値関数であるから，それが 0 になるという式は実数になおせば，二つの関係式

$$\mathrm{Re}\,\psi = 0, \qquad \mathrm{Im}\,\psi = 0 \tag{3.21}$$

を与え，3 次元空間中では上の二つの方程式は曲線を形成する．ノードの位置では位相という概念は意味をもたない．したがって，この場合には，微小閉曲線に沿った位相変化は小さいということは主張はできず，$2n\pi$ だけの不定性があってもよい．整数 n はノードに固有のもので正負いずれの値もとるが，正の場合は曲線が反時計まわり，負の場合には時計まわりと約束する．つまり，3 次元空間中の微小閉曲線のまわりでの位相変化は

$$\begin{aligned}\varPhi &= 2n\pi + \frac{e}{\hbar c}\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}\\ &= 2n\pi + \frac{e}{\hbar c}\int \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{3.22}$$

で与えられる．もう少し正確にいうと，$2n\pi$ を除いた部分は，ノードがない場合と同じく，電磁場に起因するもの，つまり，微小閉曲線を貫く磁束で与えられる．この表式は有限の閉曲線の場合に拡張できる．それには，有限閉曲線を縁とする面を微小な面に分割して，和をとればよく

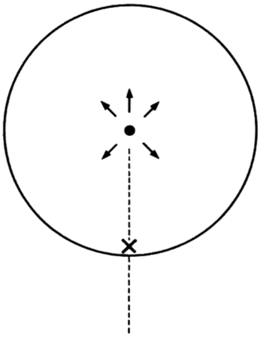


図 3.2　ディラックモノポールの概念図. $\theta = \pi$ はノード線(ディラックの紐)を表す. このノード線は, 適当な変換(ゲージ変換)によって動かすことができる.

$$\Phi = 2\pi \sum_i n_i + \frac{e}{\hbar c} \int_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.23}$$

が得られる. ここで, $\sum_i$ は曲面を貫くすべてのノードについての和を意味する.

いま, 式 (3.23) を閉曲面に当てはめてみると, このとき縁となる曲線は一点に縮んでしまうので, 位相変化 Φ は 0 以外にとれないことがわかる. これから,

$$\oint_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{2\pi\hbar c}{e} \sum_i n_i \tag{3.24}$$

がでてくる. つまり, 閉曲面を貫く磁束は, 符号をふくめて数えたノード線の総数に比例し, この値は一般に 0 ではない. このとき, 磁場の "源泉" が閉曲面の内部に存在することを示唆している. 言い替えれば, ノード線には, 端があって, それが磁場の源, つまり, "磁荷" を定義するのである！　もし, 端が閉曲面内になければ, ノード線は閉曲面を, かならず 2 回横切ることになり, 出ていくものと, 入ってくるものが互いに打ち消し合って 0 になる. そこで, 式 (3.24) のなかの和が, 閉曲面内に存在する実質的な磁荷の数を定義することになる[2]. 磁荷

[2] 式 (3.24) は形式的には, いわゆる量子条件の一種で, n_i は量子数とみられる.

の大きさを g とすれば，式 (3.24) の左辺は，$4\pi g$ となるから，式 (3.24) は，

$$4\pi g = 2\pi n \frac{\hbar c}{e} \tag{3.25}$$

となる．あるいは，

$$eg = n \frac{\hbar c}{2} \tag{3.26}$$

が得られる．これが有名なディラックの量子条件である．この表式の意味するところは，素電荷と磁荷がお互いに，いわば，“双対的”な関係にあることを示している．このことは，素電荷がなぜ，e をとるかという説明を量子化された単磁極の存在を仮定することによって与えているともいえる．しかし，これはもちろん説明にはならない．量子化された磁極が存在するためには素電荷を必要とする．もちろん，単磁極の存在が別の理由から説明されれば別である．いずれにしても，量子力学と電磁場を組み合わせることにより，量子化されたモノポールという奇妙な粒子的実体が導入された．しかし，現実にはこのような粒子が自然界には存在しないようである[3]．にもかかわらず，ディラック位相因子のアイデア自身はモノポールという実体とは無関係に量子物理のさまざまな分野で非常に重要な役割をはたしている．

3.3 ソレノイド磁場による干渉効果

量子化されたモノポールを現実の観測で見つけるのは今のところ見込みがなさそうであるが，それとは別に，ベクトルポテンシャルの効果が量子力学において実際に検証できる可能性がある．これがいわゆる“アハラノフ-ボーム効果”といわれるものである．これについて簡単にふれておこう．基本的なアイデア

[3]最近の統一ゲージ理論において，モノポールが，非可換ゲージ場の満たす場の方程式の特殊解として実現されることが知られている．しかし，この“粒子”もこれまでのところ現実には確認されてはいない．

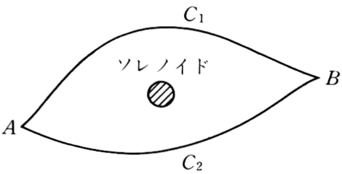


図 3.3　ソレノイド(斜線の部分)を電子線がまわりこんだ後に再結合させると干渉がおこる.

は単純である．磁場を非常に細いソレノイドの中に閉じこめて，直接に磁場に触れないように電子波を入射するのである．そして，このときソレノイドの外でこの磁場がつくるベクトルポテンシャルが電子波(波動関数)に影響を及ぼすかどうかを調べるのである．磁場はソレノイドの外では0であるが，ベクトルポテンシャル自身は有限値をとりうるので，電子波は影響を受ける可能性がある．具体的にそれを見るためには，次のように干渉をおこさせればよい．電子波を二つに分けて，それぞれの成分をソレノイドのまわりを走らせてから，再び結合させるのである．そうすると，ベクトルポテンシャルによる効果が干渉縞を通して現れるはずだというのである．

以上の設定を式によって表してみよう．電子波が二つの成分に分割されたのちに，ソレノイドのまわりをまわって再結合させる．二つの波をψ_1, ψ_2とすれば，式(3.7)より，

$$\psi_1 = \psi_1^0 \exp\left[-iS_1\right], \qquad \psi_2 = \psi_2^0 \exp\left[-iS_2\right] \tag{3.27}$$

と書ける．ここで，$\psi_{1,2}$は自由粒子の波動関数であって，それぞれの領域においては磁場が0であることを考慮すると，1価関数として表せる[4]．これらの1次結合をつくって，その絶対値をとると

$$|\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1^0|^2 + |\psi_2^0|^2 + 2\psi_1^0\psi_2^0 \cos(S_1 - S_2) \tag{3.28}$$

[4]位相S_1, S_2は一般に非可積分的であるが，今の場合，それぞれの領域においては磁場が0なので可積分条件を満たしているからである．しかし，ソレノイドを囲む領域全体では1価性は保証されない．

最後の項が干渉効果を与える．cos の中は

$$S_1 - S_2 = \frac{e}{\hbar c}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x} = \frac{e}{\hbar c}\int_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.29}$$

となって，閉曲線 C を貫く磁束になる．荷電粒子は，磁場のある領域を通過しなくても，ソレノイドを貫く磁束は有限の値をとりうるので量子力学的な干渉効果は起こり得るというわけである．

このように，アハラノフ-ボーム効果は磁場の存在しない領域においても波動関数がベクトルポテンシャルを通じて影響を受けるという一見奇妙な現象であるが，舞台となっている空間が，非単連結空間 (無限に長いソレノイドのある空間は単連結ではない．6 章参照) であるというトポロジー的考察によって理解できる可能性があるということを言及しておく．

4　幾何学的位相

この章では最近の量子力学における話題の一つである幾何学的位相について述る．それは波動関数または量子状態に付随する位相の一種である．その概念自体は実に単純至極なものであるが，量子力学におけるトポロジー的効果が顕在化されたものとみることができ，非常に多彩な現象に応用が効くという意味において種々の分野で注目されている概念である．幾何学的位相という概念が定着しだしたのはここ 10 年足らずのことである．狭い意味でいうと幾何学的位相は量子断熱定理と関連して指摘された“ベリーの位相”といわれるものを指しているが，現在ではもっと一般的な枠組で理解されている概念である[1]．

4.1　量子断熱定理

まず，狭い意味での幾何学的位相，ベリーの位相について述べよう．それをやる前に準備として，量子断熱定理の説明をして

[1] 幾何学的位相の起源はかなり古い．量子断熱定理に関するものとしては量子化学者が認識したのが最初であろう．最近のベリーの論文をきっかけとして一気にひろがったというのが実際のところである．

おこう[2]．断熱定理の厳密な取扱いは相当にこみいっているが，それについてはあまり気にしないで話を進める．ここで問題としているのは時間的に変動する外場のなかにおかれた量子力学系である．一番手近な例として交流電場の中におかれた水素原子を思い浮かべればよい．このような系は一般的に時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(t)\psi \tag{4.1}$$

によって記述される．ハミルトニアン $H(t)$ は外場を表すパラメーター(それは一般に，複数個のものの組 $(x_1(t)\cdots x_N(t))$ で与えられる．以下では総称して $X(t)$ とおこう)の関数で書かれる．つまり，ハミルトニアンの時間依存性はこのパラメーターを通じて入ってくるのである．量子力学のテキストに通常扱われる断熱定理は，まず，考えている量子系の時間的変動に比べて外部パラメーターの変化がずっとゆっくりしている場合を考える．このときには，$H(t)$ の中のパラメーターの時間変化が瞬間的に凍結したと考えて，定常状態に対するシュレーディンガー方程式

$$H(t)|n(t)\rangle = \lambda_n(t)|n(t)\rangle \tag{4.2}$$

に注目する(これは，いわば，スナップショット方程式とでもよぶべきである)．ここで，$|n(t)\rangle$ は量子数 n をもつ断熱状態で，$\lambda_n(t)$ は対応するエネルギー準位である．これらは当然パラメーター $X(t)$ を通じて時間的にゆっくりと変化する量である．この状態を用いて時間に依存するシュレーディンガー方程式の解を

$$|\psi_n(t)\rangle = C_n(t)|n(t)\rangle \tag{4.3}$$

とおこう．一般には波動関数は量子数 n についての $|\psi_n(t)\rangle$ の重ね合わせで与えられるが，ここでは話を簡単にするため，特定の断熱準位(量子数 n を保持した状態)の場合に限ろう．一

[2]歴史的には，断熱定理の量子力学での重要性はエーレンフェストによって前期量子力学においてはじめて認識された．

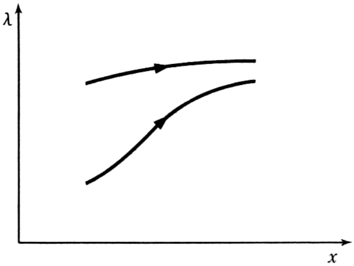


図 4.1 断熱スペクトルのパラメーターとともに変化する様子の概念図．1 つの断熱状態は量子数 n を保存するように“動く”．この事実は，いわゆる前期量子論のエーレンフェストの断熱定理に対応するものである．

般にはさらにこの準位は“縮退”(degenerate) している (つまり，同じエネルギーをもっているが，独立な状態がいくつか存在している) だろうが，ここでは縮退がない (non-degenerate) 場合に話をかぎる．そこで，係数 $C_n(t)$ は ψ を式 (4.1) に代入することにより，

$$i\hbar\frac{dC_n}{dt} = \lambda_n C_n \tag{4.4}$$

を満たすことが容易にわかる．ここで，$|n(t)\rangle$ の時間変化は無視できるものとする ($d|n(t)\rangle/dt \simeq 0$)．これは，パラメーターの変化速度に比例するから最初の近似では無視できるということからきている．これから，係数 $C_n(t)$ はただちに求められて，

$$C_n(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda_n(s)ds\right] \tag{4.5}$$

すなわち，量子数 n で指定される断熱状態は

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda_n(s)ds\right]|n(t)\rangle \tag{4.6}$$

で与えられる．第 1 項は，ちょうど，ハミルトニアンが時間に依存しない定常状態におけるエネルギー因子 $\exp[-iE_nt/\hbar]$ に対応するものである．

4.2 非可積分的位相因子

上の断熱定理を導く際に，実は，係数 $C_n(t)$ に付加的な位相因子をつけておく自由度が残されている．この位相因子を $\exp[i\alpha]$ とおこう．この余分な位相因子をつけるというアイデアは，まさに，前章で議論したディラックの非可積分的位相のアイデアと同じ考えである．現実の空間のかわりにパラメーター空間におきかえて，そのまま適用したものと思えばよいのである．そこで，

$$C_n(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda_n(s)ds\right]\exp[i\alpha(t)] \tag{4.7}$$

とおいて，シュレーディンガー方程式に代入することによって，$\alpha(t)$ に対する方程式は

$$\dot{\alpha} = \left\langle n\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|n\right\rangle \tag{4.8}$$

のように得られる．位相 α は積分

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t}\left\langle n\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|n\right\rangle dt \tag{4.9}$$

によって与えられる．ここで，断熱状態がパラメーター X の関数であることに注意して，さらに微分のチェイン則，

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

を使うと，上の積分は X 空間のなかでの経路に沿っての積分に書き換えられる．

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle n\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|n\right\rangle dt = \int\sum_{i=1}^{N}\left\langle n\left|i\frac{\partial}{\partial x_i}\right|n\right\rangle dx_i \tag{4.11}$$

このように書いたときに，この積分の値は一般的に始点と終点を与えたときに，それを結ぶ経路に依存する (前章の図 3.1 参照．実際の空間の経路をパラメーター空間の経路に読みかえればよい)，すなわち，非可積分的であることを示そう．いま，2 点 P と Q を結ぶ経路を二つ用意して C_1，C_2 としよう．これらに沿った位相は，それぞれ，

$$\Gamma_1 = \int_{C_1} \sum_{i=1}^{N} \left\langle n \left| \frac{i\partial}{\partial x_i} \right| n \right\rangle dx_i \tag{4.12}$$

および，

$$\Gamma_2 = \int_{C_2} \sum_{i=1}^{N} \left\langle n \left| \frac{i\partial}{\partial x_i} \right| n \right\rangle dx_i \tag{4.13}$$

となる．C_1 に沿って，P から Q へ行き，C_2 に沿って Q から P に戻ると，結果的に P から出て P へ戻る閉曲線 C に沿って元に戻ると，波動関数の値は元の値には戻らなくて自明でない位相因子がつく．それは，$C = C_1 - C_2$ に注意すると

$$\Gamma(C) = \Gamma_1 - \Gamma_2 = \oint_C \sum \left\langle n \left| \frac{i\partial}{\partial x_i} \right| n \right\rangle dx_i \tag{4.14}$$

のように，周回積分で与えられる．これが通称“ベリーの位相”とよばれているものである．このように，経路にのみ依存するという意味で，位相 Γ は幾何学的位相とよばれる．式 (4.14) を形式的に

$$\Gamma = \oint_C A_i dx_i \tag{4.15}$$

のように書くと，“場”

$$A_i = \left\langle n \left| \frac{i\partial}{\partial x_i} \right| n \right\rangle \tag{4.16}$$

はパラメーター空間に誘導されたベクトルポテンシャルとみなせる．これはパラメーター空間に，“ゲージ場”が導入されたことと同等である．実際，断熱状態を $|n\rangle \to \exp[i\beta]|n\rangle$ のように位相変換を施すと，$A_i \to A_i - \partial_i \beta$ となり，これはちょうどゲージ変換となる．

上に導いた位相Γ は，いったい，どのように表せるのだろうか？ それをみるために積分の表式を書き直してみる．Γ の線積分をストークスの定理を使って，

$$\Gamma(C) = i \sum_{j,k} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \langle n| \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |n\rangle \right) dx_j \wedge dx_k \tag{4.17}$$

と書き直し，完全性より，

$$\Gamma(C) = i\sum_{j,k}\sum_{m}\int_S \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\langle n|\right)|m\rangle\langle m|\frac{\partial}{\partial x_k}|n\rangle dx_j \wedge dx_k \tag{4.18}$$

となる．また，$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\langle m|\right)|n\rangle + \langle m|\frac{\partial}{\partial x_k}|n\rangle = 0 \tag{4.19}$$

を使うと，

$$\Gamma(C) = -i\sum_{j,k}\sum_{m\neq n}\int_S \langle n|\frac{\partial}{\partial x_j}|m\rangle\langle m|\frac{\partial}{\partial x_k}|n\rangle dx_j \wedge dx_k \tag{4.20}$$

となる．次にスナップショット方程式 (4.2) の両辺を x_j で微分し，

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}|n\rangle + H\frac{\partial}{\partial x_j}|n\rangle = \lambda_n\frac{\partial}{\partial x_j}|n\rangle + \frac{\partial\lambda_n}{\partial x_j}|n\rangle \tag{4.21}$$

が導かれ，左 $\langle m|$ からを掛けると $(n \neq m)$,

$$\left\langle m\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\right|n\right\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)^{-1}\left\langle m\left|\frac{\partial H}{\partial x_j}\right|n\right\rangle \tag{4.22}$$

が得られる．つまり，$\Gamma(C)$ は式 (4.20), (4.22) より次式で表せる．

$$\Gamma(C) = i\sum_{j,k}\sum_{m\neq n}\frac{\langle n|\partial H/\partial x_j|m\rangle\langle m|\partial H/\partial x_k|n\rangle}{(\lambda_n - \lambda_m)^2}dx_j \wedge dx_k \tag{4.23}$$

この式からわかることは，$\lambda_n = \lambda_m$ となるところにおいて被積分関数が発散するという事実である．つまり，“準位交差”がおこる X 空間の点は特別な点になっていることを暗示している．

4.2.1 3パラメーター模型

次に，この様子を詳しく調べるために，特定の準位交差にだけ注目しよう．すべての準位は縮退がないという仮定のもとでは，交差はたった二つの準位間で起こるとしてよい．これをモデル化すると，2×2 行列で与えられるハミルトニアン

$$H = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}$$

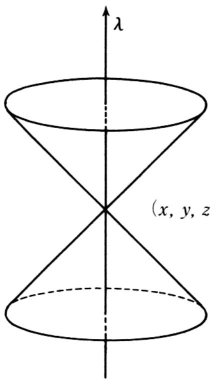


図 4.2 2 準位の円錐状交差．この図は 2 パラメーターの場合を表しており，準位交差は原点でおこる．

$$= \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \tag{4.24}$$

に帰着する．これは，いわば類型的モデルとよぶべきもので，磁場 $\boldsymbol{H}(=(x,y,z))$ 中のスピンに対するハミルトニアンそのものになっている．断熱エネルギー準位は

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2} \equiv \pm r \tag{4.25}$$

となり，準位交差は (x,y,z) 空間の原点で起こる．対応する固有状態を，

$$|\lambda_\pm\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

とおこう．ここで，a,b は，規格化条件 $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$, つまり，

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{4.27}$$

を満たす．$\lambda = -r$ に対して，a,b は次の関係

$$\frac{b}{a} = \frac{-\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \exp[-i\phi] \tag{4.28}$$

また，$\lambda = +r$ に対しては，

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \exp[-i\phi] \tag{4.29}$$

で与えられる．ここで，極座標

$$(x,\, y,\, z) = (r\sin\theta\cos\phi,\, r\sin\theta\sin\phi,\, r\cos\theta) \tag{4.30}$$

を用いた．以下では，$\lambda = -r$ に話を限ろう．a と b の間の関係が，比で与えられていること，および，規格化条件から，次の二つの場合が考えられる．

$$a^{\mathrm{N}} = \sin(\theta/2)\exp[i\phi], \qquad b^{\mathrm{N}} = -\cos(\theta/2) \tag{4.31}$$

$$a^{\mathrm{S}} = \sin(\theta/2), \qquad b^{\mathrm{S}} = -\cos(\theta/2)\exp[-i\phi] \tag{4.32}$$

それぞれの状態に式 (4.16) をあてはめてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$を求めると，次のようになる．

$$A_x^{\mathrm{N}} = \frac{-(1-\cos\theta)\sin\phi}{2r\sin\theta}, \qquad A_y^{\mathrm{N}} = \frac{(1-\cos\theta)\cos\phi}{2r\sin\theta},$$
$$A_z^{\mathrm{N}} = 0 \tag{4.33}$$

$$A_x^{\mathrm{S}} = \frac{-(1+\cos\theta)\sin\phi}{2r\sin\theta}, \qquad A_y^{\mathrm{S}} = \frac{(1+\cos\theta)\cos\phi}{2r\sin\theta},$$
$$A_z^{\mathrm{S}} = 0 \tag{4.34}$$

また，λ_+の準位におけるベクトルポテンシャルの導出は読者におまかせする．ここで，二つのベクトルポテンシャルの間には，

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{N}} - \nabla\phi \tag{4.35}$$

なる関係があることに注意しよう．これは，いわゆるゲージ変換である[3]．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}$はそれぞれ$\theta = \pi, 0$ において発散する．実際，このベクトルポテンシャルは，原点に置かれたモノポールより生じる磁場に対するそれと同じ形をしていることが直接計算をして確かめることができる．つまり，$\boldsymbol{H} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ に従って磁場を求めれば，モノポールによる磁場，

[3]このベクトルポテンシャルの間の関係は断熱準位のとり方が2通りあることからきている．実際には，断熱準位のとり方は，位相因子の選び方によって，無限個あることに注意しよう．これによって，ディラックの紐の配置は自在に移動できる．

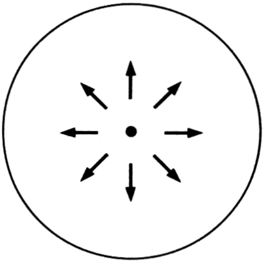


図 4.3 準位の交差点に"モノポール"がおかれたものと同等である．位相 Γ はこのモノポールがつくる磁束になっている．なお，図 3.2 も参照．

$$\boldsymbol{H} = \frac{k}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{4.36}$$

に一致する ($\boldsymbol{e}_r$は動径方向の単位ベクトル)．ここで，"磁荷"に対応する量は，今の場合，係数 $k = 1/2$ である．このようにして，ベクトルポテンシャルが発散する場所は，前章で述べたディラックの紐 (ノード線) にほかならない．ディラックの紐に付随する発散を避けるためには，位相 Γ は，ストークスの定理を用いて面積分に直しておくのがよい．この面積分は，原点に置かれたモノポールのつくる磁場が閉曲線 C を縁とする曲面 (帽子) を貫く"磁束"という意味をもつ．

さて，ディラックモノポールには特別の量子条件 (電荷と磁荷の積がプランク定数の半整数倍で与えられる) が課されるのが特徴であった．同じことが今回の場合にもいえるのである．これを別のやり方で説明しよう．このために，線積分

$$\oint_C \omega \equiv \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{4.37}$$

を面積分になおす際に 2 通りのやり方があることに注意しよう (図 4.4)．これは，ベクトルポテンシャルが 2 通りの表し方があるという事実と関係している．一つは，時計回りに動くようにするとき積分は上半面 S 上でなされる．このとき，ベクトルポテンシャルとして，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}$ をとる．なぜなら，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}$ は上半面に特異点はないからである，ゆえに，

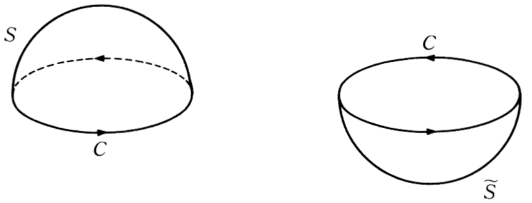


図 4.4　曲線 C を縁とする曲面が 2 つとれる．それらを S と $\tilde{S}$ とすると，各々の上でストークスの定理が適用できる．

$$\oint_C \omega^{\mathrm{N}} = \int_S d\omega \tag{4.38}$$

もう一つは，下半面 $\tilde{S}$ でなされる．このときには，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}$ をとるのだが，それは下半面において，特異点をもたないからである，したがって，

$$\oint_C \omega^{\mathrm{S}} = -\int_{\tilde{S}} d\omega \tag{4.39}$$

ところが，量子論的には，つまり指数関数の肩にのせるとこの二つは区別できない，つまり，

$$\exp[i\int_S d\omega] = \exp[-i\int_{\tilde{S}} d\omega] \tag{4.40}$$

このことから，ディラックの量子条件と同じ式

$$\int_{S+\tilde{S}} d\omega = 2n\pi \qquad (n = \text{整数}) \tag{4.41}$$

が得られる．今の場合は $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi/2$ なので，$n=1$ となっている[4]．積分は “交差点 (モノポール)” を含む全閉曲面上 (実際には球面上) で行う．式 (4.41) が求める量子条件である．右辺の整数はディラック条件と同じく位相量子数とよぶべきものである．左辺の積分は交差点に置かれた湧き出しの強さを表すもので，交差点を囲む曲面の形によらない．その意味で位相不変

[4] これは 2 準位模型の特殊性であって，一般には，式 (4.40) または，それから導かれる式 (4.41) が量子条件として使われる．

量とよばれて然るべきものである．この位相不変量の存在がベリーの位相を特徴づけるもので，Γ が，またの名を幾何学的位相とよばれる由縁である．つまり，この準位交差点がパラメーター空間におけるトポロジー的な“障害”となって，これが位相 Γ という形で現れるともいえる．また，準位交差点の影響が遠く離れた球面上に現れるというのは大域的なトポロジー現象の発現になっているともいえる．

4.2.2 2パラメーター模型

上の3パラメーターの類型モデルを2パラメーターに制限したものが考えられるが，これについて説明しよう．今，$z=0$ としてみよう．すると，ハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} 0 & x+iy \\ x-iy & 0 \end{pmatrix} = x\sigma_x + y\sigma_y \tag{4.42}$$

断熱準位は，

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{x^2+y^2} \tag{4.43}$$

となる．対応する固有状態は3パラメーター模型の場合と同様に，

$$|\lambda_\pm\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

となる．λ_-の固有状態について考えると a, b は $a/b = -\exp[-i\phi]$ を満たし，規格化条件を考え合わせると，

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\exp[i\phi], \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.45}$$

と選べる．ベクトルポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}_- = -\frac{1}{2}\nabla\phi = \frac{1}{2}(\sin\theta/r, -\cos\theta/r) \tag{4.46}$$

と計算される (λ_+の準位については，読者への演習問題としよう)．また，$\Gamma_-(C) = \pi$ となる．ここで，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$ は，ちょうど原点を中心に測った極角であり，多価関数であることを注意

しよう．このベクトルポテンシャルは，ちょうど，2次元平面の原点を貫くソレノイドの磁場となり，位相因子は $\exp[i\pi] = -1$ と計算される．つまり，閉曲線が (x, y) 平面の原点のまわりを回ったとき波動関数は符号を変える．

［コメント］：3パラメーター模型の特殊化として，上の場合とは異なる選び方が可能である．式 (4.24) のなかで $y = 0$ とおいたものを考える．

$$H = \begin{pmatrix} z & x \\ x & -z \end{pmatrix} = x\sigma_x + z\sigma_z \tag{4.47}$$

ここで，このハミルトニアンは "実" であることが重要である．断熱準位は，

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \tag{4.48}$$

となる．対応する固有状態を，

$$|\lambda_\pm\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

とおき，λ_- の固有状態について考えると a, b は $a/b = -\tan(\theta/2)$ を満たし，規格化条件を考え合わせると，

$$a = \sin(\theta/2), \qquad b = -\cos(\theta/2) \tag{4.50}$$

同様にベクトルポテンシャルを求めると0になることがわかる！(これは，固有関数が実関数であることに起因する)．そこで，ベクトルポテンシャルを線積分した位相 Γ も0になるように思えるが，(x, z) 平面中で原点を囲む閉曲線に沿った断熱変化を考えると式 (4.50) より，$|\lambda_-\rangle$ の符号は変化する ($|\lambda_+\rangle$ も同様である)．その意味で，ベリーの位相因子は，

$$\exp[i\Gamma(C)] = -1 \tag{4.51}$$

となる．このように，ハミルトニアンが実の場合には，ベリーの位相は必ずしもベクトルポテンシャル (接続) の線積分によっ

て表現できないことを示している．この事実は数学的にいえば，特性類の分類において Whitney-Stiefel 類とよばれているものに対応していると思われる (6 章参照)．この符号交替の現象は，いわゆるロンゲット・ヒギンズ (Longuet-Higgins) の符号交替定理とよばれるもので，断熱準位の交差が断熱的波動関数の位相変化をもたらすことを最初に指摘した例である．

4.3 ホロノミーと幾何学的位相

4.3.1 ベクトルの平行移動とホロノミー

位相因子 $\exp[i\Gamma]$ の存在は，ある意味でパラメーター空間中で波動関数が 1 価関数でないということ表したものであると考えられるが，類似の現象は他にもいろいろとある．量子力学をはなれて，視覚的にみるために微分幾何の例をとりあげよう．球面上で，ベクトルが北極 N から出発して (このベクトルは，北極において接平面内にあるものとしよう) ある経路に沿って元の場所に戻る場合を想定してみる．この経路としては，大円の孤に沿って赤道上の点 E まで行き，そこから赤道に沿って T まで行き，再び大円の孤に沿って北極に戻る経路をとる．ただし，このときベクトルの移動はすべて “平行に移動する ” ものとする．その結果，ベクトルの向きは，図から明らかなように，初めの向きとは異なっている．これは一般相対性理論でおなじみの教訓的例題であるが，いわゆる，“ホロノミー ” の手近な例を与えている．このようにベクトルがある点から出発して閉じた経路を平行移動してもとの位置に戻ったときに，最初のベクトルと方向が変わっているような状況を捉える概念をホロノミーとよぶ．ここで，平行移動を直感的に説明すると次のようになる．点 x において，一つの座標系を設定して，その点でベクトルを考える．この座標系でのベクトルの成分と全く同じ成分をもったベクトルを，近くの点 $x + dx$ の座標系において描いてみ

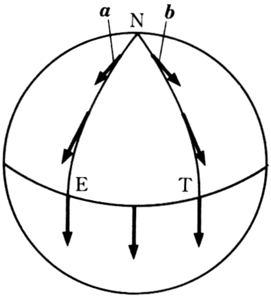


図 4.5　北極 N におかれたベクトル $\boldsymbol{a}$ は，点 E, T を通って再び北極に戻ると $\boldsymbol{b}$ のように変化している．

ると，これが x から $x+dx$ に平行移動されたベクトルになる．ここで注意すべきは座標系が空間の各点で異なるので，各点でのベクトルというものを単純に比較はできないことである．つまり，これらの各点で異なるベクトルを一定の方法で関係づける量が接続の概念である．

量子力学においては，上の例での球面上を動くベクトルはちょうど (非可積分的位相 α を含む) 状態 $\psi_n(X)$ に対応する．位相 Γ は，いわば，"量子的ホロノミー" とでもよぶべきものである．平行移動の条件を状態ベクトル $\psi_n(X)$ に当てはめると次のようになる．

$$\langle\psi_n(X)|\psi_n(X+dX)\rangle = \langle\psi_n(X)|\psi_n(X)\rangle \tag{4.52}$$

$\psi_n(X+dX) = \psi_n(X) + d\psi_n$を用いると，

$$\langle\psi_n(X)|d|\psi_n(X)\rangle = 0 \tag{4.53}$$

が得られる．ここで，d はパラメーター X に関する微分を意味する．この表式から，$|\psi_n\rangle = \exp[i\alpha]|n\rangle$ を代入すると，

$$\langle\psi_n|d|\psi_n\rangle = id\alpha\langle n|n\rangle + \langle n|d|n\rangle = 0 \tag{4.54}$$

が得られ，したがって位相 α に対する方程式は微分の形で，

$$d\alpha = i\langle n|d|n\rangle \tag{4.55}$$

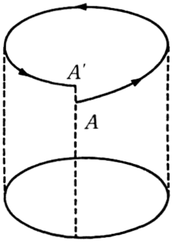


図 4.6 ホロノミーの概念図．パラメーター空間 M の中での閉曲線 C 上の断熱状態(ファイバー)を終点 A のベクトルで表す．これが C に沿って一周してもとに戻るとはじめの状態から終点が A′ のようにずれる．

が導かれて，これから，Γ の表式が得られる．逆にいえば，ホロノミーという抽象的な概念が量子力学において実現されたとみることができる．これを図式的にいえば，次のようになるだろう (図 4.6)．パラメーター空間の各点に状態ベクトルの空間を貼りつけたものの全体を考える．これは，数学的にいえば，パラメーター空間を "底空間" とするベクトルバンドルというものの描写である． ベクトルバンドルの特徴は局所的にみれば，単なるパラメーターの関数であるが，バンドル全体としてみればねじれているのである．このねじれが量子的ホロノミーに対する直感的描像である．ベクトルバンドル (一般的にはファイバーバンドル) については 6 章で詳しく説明する．

4.3.2 偏光現象と幾何学的位相

ホロノミーの概念は純然たる数学的概念であるが，現実の現象として光の偏光に関連した現象において，実際観測され得るということが知られている．それは，一言でいえば，直線偏光している光の偏光方向が光線に沿ってどう変化するかという問題と関係している．光の進行は曲線の微分幾何の問題として定式化できることが以前から知られているが，大ざっぱにいえば，曲線上を光子 (粒子) が走っていると思えばよい．そうすると粒子の曲線上の運動と同じ問題に帰着される．

この運動を考察するために曲線上における直交座標系のとり

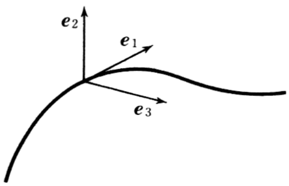


図 4.7　曲線上の座標系.

方について復習しておこう．まず，曲線を弧長 s をパラメーターとしたときのパラメーター表示

$$\boldsymbol{f}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \tag{4.56}$$

において，$\boldsymbol{e}_1$ を接線方向の単位ベクトルとしよう．$\boldsymbol{e}_1$ は，

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \frac{d\boldsymbol{f}/ds}{|d\boldsymbol{f}/ds|} \tag{4.57}$$

で与えられる．次に，ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の曲線上を動くときの変化を考えよう．それは，

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = k(s)\boldsymbol{e}_2 \tag{4.58}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{e}_2$ は主法線ベクトルで，$k(s)$ は，曲線の曲率を表す．$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は直交することは明らかである．最後に，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に直交するベクトルとして，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ を定義しよう．これは培法線ベクトルとよばれる．法線ベクトルと，培法線ベクトルを導入したので，それらの曲線上での変化は次のように与えられる．

$$\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -k\boldsymbol{e}_1 + \tau\boldsymbol{e}_3, \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = -\tau\boldsymbol{e}_2 \tag{4.59}$$

ここで，τ は戻率 (ねじれ率) を表す．これらと上の接線ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の変化とあわせてフルネ-セレー (Frenet-Seret) の公式として知られている．

光の伝搬の問題に戻ると，光は横波であるから偏光の方向は "法平面" 内 ($\boldsymbol{e}_2$-$\boldsymbol{e}_3$) にある．はじめに，偏光の方向 (電場 $\boldsymbol{E}$ の

方向と考える）が主法線方向を向いているとしてよい．微分幾何の公式によると，曲線上の微小な間隔 ds だけはなれた 2 点における主法線ベクトルの変化はねじれによって記述される．つまり，ds だけ変化したとき法平面が回転する角度を $d\phi$ とすれば，

$$\frac{d\phi}{ds} = \tau \tag{4.60}$$

という関係がある．したがって，偏光方向の変化は光が曲線上を進行するにつれ，法平面内での (ゆっくりした) 回転によって与えられる．有限な距離 l だけ離れた 2 点間では，この変化は，

$$\Phi = \int_0^l \tau ds \tag{4.61}$$

で与えられる．

上に述べた古典的な光の偏りを幾何学的位相の観点より説明しよう[5]．光ファイバー中を光が進むとき，光の運動に対して，ある種の断熱定理が成立するというところがポイントである．それは，光がファイバー中を伝播するとき，二つの時間スケールが存在して，その一つはファイバーの軸方向のスケールで，もう一つはファイバーの断面方向である．軸方向へ光が動く時間は，断面方向へ動く時間よりもゆっくりしている．このとき，軸方向への長さを s とすれば，それは時間パラメーターとみられる．また，ハミルトニアンの対応物として，

$$h = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{4.62}$$

という量が与えられ，これはヘリシティとよばれるものである (ヘリシティについての簡単な説明は補足参照)．$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで，これは s に比べてゆっくり変動する関数である．このハミルトニアンは，ちょうど 2 準位交差の 3 パラメーター模型の形をしている．つまり，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が三つのパラメーターになって，波数空間の原点が交差点 (特異点) になっている．s

[5] R.Y.Chiao and A.Tomita : Phys.Rev.Lett.**57**(1986)937.

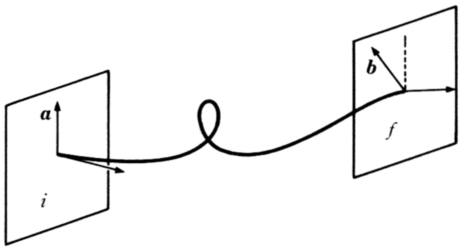


図 4.8　偏光方向 **a** で入射されたレーザー光は光ファイバー中で 1 回転すると，偏光方向は **b** のように変化する．

を固定したときの "断熱準位" に対応するヘリシティの固有状態は $\lambda_\pm = \pm|\boldsymbol{k}|$ および，$|\pm\rangle$ で与えられて，右あるいは左旋回の円偏光の状態を表している．いまの場合，直線偏光に関心があるが，それは円偏光状態を重ね合わて得られる[6]．そこで，初めに光子が一定の波数ベクトルで入射し，図 4.8 のようにファイバーに沿って進行し，1 回転して初めと同じ波数ベクトルになったとしよう．このとき，波数空間中でのベクトル $\boldsymbol{k}$ の軌跡は半径が $|\boldsymbol{k}|$ の球面上での閉曲線を描く．このとき，ベリーの位相 Γ は，この閉曲線によって囲まれた面を貫く "モノポール" のつくる "磁束" となり，球面上のループで囲まれた面積で与えられる．そこで，初期の偏光状態が

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \tag{4.63}$$

にあったとすると，終状態は

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\exp[i\Gamma]|+\rangle + \exp[-i\Gamma]|-\rangle) \tag{4.64}$$

のようにベリーの位相が付加される．ここで，Γ は上の準位 λ_+ に対するもので，上の断熱準位に対するベリーの位相は，下のそれとは符号が異なるだけであるという事実に注意しよう．

[6] 例えば，J.J.Sakurai : "Advanced Quantum Mechanics "(Addison-Wesley,1967)p31 を参照せよ．

この表式によって，偏光方向の変化は次のように説明できる．円偏光の状態は直線偏光を表す単位ベクトル　$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を使って，$|\pm\rangle = (\boldsymbol{e}_2 \pm i\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{2}$ と表せることに注意すれば，初めと終りの偏光状態は，それぞれ，

$$|\psi_i\rangle = |\boldsymbol{e}_2\rangle, \qquad |\psi_f\rangle = \cos\Gamma|\boldsymbol{e}_2\rangle + \sin\Gamma|\boldsymbol{e}_3\rangle \tag{4.65}$$

となって，$|\psi_f\rangle$ は $|\psi_i\rangle$ を，$\boldsymbol{e}_1$ 軸のまわりにちょうど角度 Γ だけ回転したものになっている．つまり，偏光方向がファイバー曲線を通過する間に Γ だけ回転する．これが上で与えた偏光面の回転角 Φ に対応する．

4.4　幾何学的位相の一般形

ベリーの位相は，断熱近似という，いわば特殊な近似に基づいているにもかかわらず，量子力学の中に潜む幾何学的，トポロジー的特性を非常にうまく抽出したものといえる．この節では断熱近似という枠をはずし，一般的な幾何学的位相というものについてふれておこう．出発点は，シュレーディンガー自身のアイデアである．シュレーディンガーは，波動光学における位相と古典力学の作用関数との間の類似に目をつけて，波動関数を

$$\psi(x,t) = A\exp\left[i\frac{S}{\hbar}\right] \tag{4.66}$$

のようにおいた．すなわち，作用関数は比例定数を除けば量子力学的な位相にほかならない．波動関数のかわりに遷移振幅 (伝搬関数) を用いると，時間 t の間に点 x_1 から，点 x_2 に遷移する確率振幅は

$$K(x_2, t; x_1, 0) = A\exp\left[i\frac{S(x_2, x_1)}{\hbar}\right] \tag{4.67}$$

とも書かれる．ここで，作用関数は x_1 から x_2 まで至る古典的な軌道に沿って計算されるものをとる．古典的な軌道は作用関数が停留値 (極値) をとる，という条件 $\delta S = 0$ で決められる．この極値条件はニュートンの運動方程式に帰着する．

そこで，現代風に作用関数を拡張して次のような積分関数

$$I = \int_0^T \left\langle \psi \middle| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \middle| \psi \right\rangle dt \tag{4.68}$$

を考える．古典的な作用関数に対する極値条件に対応して，ψ に対して次の極値条件を課す．

$$\delta \int_0^T \left\langle \psi \middle| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \middle| \psi \right\rangle dt = 0 \tag{4.69}$$

これは変分原理に他ならない．ψ に対する変分 (作用) 原理 (4.69) は，特別な場合としてシュレーディンガー方程式そのものを与えることがわかる (波動関数 ψ に何の条件もおかずに，変分をとれば，この事実がでてくることを確かめよ)．このようにして決めた $|\psi\rangle$ を，I に代入すれば，それが古典的な作用関数 S に対応するものになる．そこで，式 (4.67) に対応するものとして，I を代入したもの，

$$K(\psi_2, t; \psi_1, 0) = \exp\left[i\frac{I}{\hbar}\right] \tag{4.70}$$

が得られる．ここで，左辺のなかの引数，ψ_1, ψ_2 は，位置座標，x_1, x_2 に相当するのであるが，これは，ψ_1 という状態から，ψ_2 という状態への遷移を表する遷移振幅である．I の第 1 項

$$\int \left\langle \psi \middle| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \middle| \psi \right\rangle dt \equiv \Gamma\hbar \tag{4.71}$$

が，ちょうど幾何学的位相の一般形を与えるとみられる．特に，$|\psi\rangle$ として断熱状態 $|n\rangle$ をとれば，簡単に確かめられるように，それはベリーの位相そのものになる[7]．

一般的幾何学的位相の基礎になっているのは，このように“量子作用原理”にあるとみられる．ψ は，一般に時間に依存するパラメーターを含んでいる．これを $\psi(a(t))$ と書こう．量子作用 I はこのパラメーターに関する作用関数に書き換えられる．さらに a に関する変分をとることにより，パラメーターに対す

[7] ここで述た事柄については，次の文献を参照：H.Kuratsuji : Mod.Phys.Lett. **A6** (1991)1847.

る運動方程式が得られる．この運動方程式の解 $a_c(t)$ を，最初の $\psi(a(t))$ に入れて Γ を計算すると，

$$\Gamma = \int \left\langle \psi(a_c) \middle| i\frac{\partial}{\partial a} \middle| \psi(a_c) \right\rangle da_c \tag{4.72}$$

のようになる．これをベリーの位相の場合と比較すると，外場に依存する特定の量子数をもつ断熱準位のかわりにパラメーターを含む状態の“族”がその役割をしている．一定の断熱準位を選んでいくという条件にはパラメーター $a(t)$ が描く軌道が対応している．

［補　足］：マクスウェル方程式の形を量子力学の方程式のように見立てることによって光子の波動方程式が得られることを示そう．真空中 (荷電粒子のない) のマクスウェル方程式，

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{H}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{4.73}$$

を次のように書き直す．

$$i\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{i}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla)(i\boldsymbol{H}), \qquad i\frac{\partial (i\boldsymbol{H})}{\partial t} = \frac{1}{i}(\boldsymbol{S}\cdot\nabla)(\boldsymbol{E}) \tag{4.74}$$

ここで，$\boldsymbol{S}$ は，$(S^j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}$ によって定義される．ϵ_{jkl} は，いわゆるレビ-チビタ記号で，(jkl) が (123) の偶置換であれば，$\epsilon_{jkl} = 1$，奇置換であれば，$\epsilon_{jkl} = -1$，(j, k, l) のうち，二つ以上等しければ，0 になる．実は S^j $(j = 1, 2, 3)$ は大きさが 1 のスピンの行列表示となる．この形式的に導入された大きさが 1 のスピンは光子のスピンが 1 である事実と関係していることに注意しておこう．これは，次のように説明される．$\boldsymbol{E}(i\boldsymbol{H})$ を $\boldsymbol{E}(i\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E}^0(i\boldsymbol{H}^0)\exp[i(\boldsymbol{kx} - \omega t)]$ のように平面波解の形に仮定し，形式的に“波動関数”$\psi_\pm = \boldsymbol{E} \pm i\boldsymbol{H}$ を導入すると，マクスウェル方程式は，

$$i\frac{\partial \psi_\pm}{\partial t} = \pm(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\psi_\pm \tag{4.75}$$

と書かれて，複合のそれぞれが 2 成分のシュレーディンガー方程式と同じ形をしている (本当は，質量 0 の粒子に対する 2 成

分の相対論的ディラック方程式といったほうがよいかも知れない). さらに,

$$\psi_\pm(t) = \psi_\pm^0 \exp[-i\omega t] \tag{4.76}$$

とおくと, 次のようになる.

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\psi_\pm^0 = \pm\omega\psi_\pm^0 \tag{4.77}$$

ただし, スピンが 1 であることから, それの z 成分 (これは, 光の進行方向にとれる) が $1, 0, -1$ の 3 個の値をとれることになり, それに対応して 3 成分で記述されるはずであるが, 2 成分との対応関係をつけるには 2 成分に書き直す必要がある. このために若干の議論をしなければならないが, ここでは詳しく述るのはやめて, 質量が 0 あるという事実よりスピンが 0 の成分は実は存在しないということに関係していることだけを指摘しておこう. したがって, 0 を除いた $1, -1$ の二つの成分だけが残る. 上の方程式において, $\boldsymbol{S}$ をパウリのスピン行列にとると, 演算子 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S}$ は, スピンの波数ベクトルの方向への射影であって, ヘリシティとよばれるものになる. 複号 $\pm$ はヘリシティが ±1 の 2 つの値を取り得ることを示している. $+1$ のヘリシティには ψ_+^0 が, -1 のヘリシティには ψ_-^0 が対応するのである. それらは, それぞれ, 右あるいは左旋回の状態とよばれて, 円偏光状態を記述する.

[余　談]: 幾何学的位相 (ベリーの位相) の興味のあるところは, パラメーター空間において接続の場, またはゲージ場が誘起されるところにある. そこで, パラメーター空間を現実の 4 次元空間におきかえたら本当のゲージ場が導かれるのではないだろうか. このようなアイデアはいわゆる統一場理論に触発されたものである. 一言でいうには専門的すぎるが, 砕いて言うと次のようになる. 基本的アイデアはいわゆるカルツァ-クライン理論と同じく 4 次元空間のほかに内部空間を想定するのであるが, そこで

定義された波動関数(実際は，場であるが) $\Psi(x,q)$ を考える．ここで，q は内部空間を表す座標である．この空間の大きさは現在の観測技術ではひっかからないほど小さいものとする．この波動関数を

$$\Psi(x,q)=\sum_n \phi_n(x)f_n(x,q) \tag{4.78}$$

のように展開する．この式は，いわゆるボルン-オッペンハイマー近似というものであって，時空座標 x を凍結したときの断熱状態 $f_n(x,q)$ による展開になっている．つまり，内部空間での運動は時空での運動に比べて非常に高いエネルギーをもっているので，断熱定理が適用できるとしてよいと仮定するのである．特に最低エネルギー状態に制限すると，断熱状態 $f_n(x,q)$ から誘導される接続

$$A_i(x)=\int f_n^*(x,q)i\frac{\partial}{\partial x_i}f_n(x,q)dq \tag{4.79}$$

が得られる．これを4次元空間における電磁場，より一般にゲージ場とみなそうというのである．これを積分したものはちょうどディラックの非可積分的位相になる．このようにみると，ディラックが彼の非可積分的位相を導入したときに，それの起源については何も言っていなかったのであるが，ここで，その起源について一つの答を出せたとみなせるかもしれない．ゲージ場の統一理論に関していえば，それはアインシュタイン以来の物理学者の究極目標であって，いろいろと試みられているが，いわゆる重力と電磁気力を統一するカルツァ-クライン理論は現在まで生き残ってきたものと考えられる．それは，大ざっぱにいえば我々の時空に加えて非常に小さな(これをコンパクト化されたとよんでいる)空間を考えて，4次元の部分で重力場を記述して，余分な空間自由度に電磁場などを背負わせようというものである．しかし，これら2種類の場についての実質的は起源については，特に言っているわけではない．つまり，電磁場あるいは，それの一般化であるゲージ場を与えられたものではな

く，なにか他のものから導くことができればそれにこしたことはないであろう．そこで，幾何学的位相によってゲージ場の起源を説明するというアイデアはひょっとすると有望になるかもしれない[8]．

[8]例えば T.Hatsuda and H.Kuratsuji : preprint,SUNY at Stony-Brook(1990) ; K.Kikkawa : Phys.Lett.**B297** (1992)89.

5 量子化された軌道とトポロジー

量子力学における近似的計算法として，ボーア-ゾンマーフェルト量子化あるいは準古典量子化とよばれるものがある．シュレーディンガー方程式を解くことが困難な場合でも，古典的な軌道が求められる場合にはエネルギー準位は計算される．ボーア-ゾンマーフェルト量子化のエッセンスはある特別の条件を満たす閉じた軌道を求めるところにある．それと同時に，軌道量子化に関連してトポロジー的な様相が顔を出す可能性がある．このことを例示することがこの章の目的である．

5.1 ポテンシャル問題と準古典量子化

はじめにハミルトン関数

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{5.1}$$

で与えられる簡単な1次元ポテンシャル問題から始めよう．等エネルギー面 $H = E$ は，位相空間中での粒子の軌道を与えるが，ポテンシャルが適当な形をとるとき軌道は閉じる[1]．素朴な

[1] ここで，話が複雑になるのを避けて，ポテンシャル $V(x)$ は，極小が1個だけになるようなものに制限しておく．

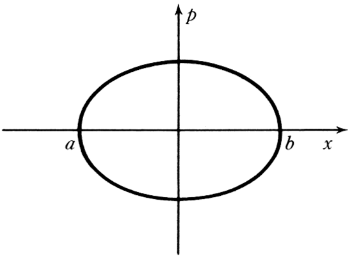


図 5.1 位相空間での閉軌道.

形での量子条件はこの閉軌道Cに沿って計算された作用積分がプランク定数の整数倍になるという条件で与えられる.

$$J = \oint_C p dx = nh \tag{5.2}$$

ここで，nは正の整数値である．あるいは，$p = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}$を使えば

$$2\int_a^b \sqrt{2m(E - V(x))} dx = nh \tag{5.3}$$

図の上でいえば，閉軌道で囲まれた面積が nh になるといってもよい．例えば，調和振動子 $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ をとると，軌道は楕円になるから，面積は

$$J = \frac{2\pi E}{\omega} \tag{5.4}$$

となり，エネルギー量子化 $E = n\hbar\omega$ が得られる.

［問］：直線型ポテンシャル $V(x) = k|x|$ に対して量子条件を当てはめて，エネルギー準位を計算せよ.

上に与えた公式は正確な式ではない．この不正確さは前期量子力学の限界を示している．では，どのように修正されるか？それを実行するために波動関数をもとにした量子力学に戻る必要がある．シュレーディンガー方程式に対する準古典近似の結果として修正された量子条件が得られる．その結果，量子条件

のトポロジカルな意味づけがなされる．それについて説明しよう．まず，波動関数に対して次の形を仮定する．

$$\psi(x) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \tag{5.5}$$

この展開はプランク定数 $\hbar$ による展開になっており，注意すべきことは 式 (5.5) の表示において，振幅 A が実数になるということは要求されていないことである．式 (5.5) をシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{5.6}$$

に代入することによって，

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial S}{\partial t} \right) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \tag{5.7}$$

および，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} A - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 A \right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \tag{5.8}$$

が得られる．これを，$\hbar$ の次数について整理すると，0 次の項から，

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) = 0 \tag{5.9}$$

これは，S を作用関数とみれば，ハミルトン-ヤコービ (以下 HJ と略記する) 方程式の特別の場合である．1 次の項からは，

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} A^2 + 2\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} \right) \tag{5.10}$$

これの両辺に A を掛けてまとめると，

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A^2}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \right) \tag{5.11}$$

となるが，$\rho = A^2$， かつ 式 (5.9) より $v = p/m$ (粒子速度) を導入すると，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0 \tag{5.12}$$

となって，ちょうど確率密度に対する連続の式を表す．さて，エネルギーが一定値の定常状態を考える．このとき作用関数は

$$S(x,t)=-Et+W(x) \tag{5.13}$$

とおける． 運動量の定義 $p=\partial_x S$ より，

$$W(x)=\int^x pdx \tag{5.14}$$

となり，HJ 方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2+V(x)=E \tag{5.15}$$

となり，これはエネルギー保存式であるが，今の場合は 1 次元であるから，(x,p) 空間中での軌道を与える．

さて，準古典的な波動関数を粒子軌道によって構成されることがわかったので，この軌道に沿った位相の変化を問題にしよう．特に，閉曲線に沿った位相変化は，

$$\hbar^{-1}\oint_C pdx+\Delta\log A\equiv\Delta\Phi \tag{5.16}$$

となる． 第 2 項は A からの寄与を示している．それは，

$$\Delta\log A=-i\oint_C \nabla\log A dx \tag{5.17}$$

のように積分で表される．この量がトポロジー的な起源をもつものである．$\Delta\Phi$ の位相変化は波動関数の一価性を要求すると 2π の整数倍でなければならない．したがって，式 (5.16) は

$$\oint_C pdx=\left(n+\frac{i}{2\pi}\oint_C \nabla\log A dx\right)2\pi\hbar \tag{5.18}$$

となる．もし，右辺の括弧の中の第 2 項がなければ素朴な形でのボーア-ゾンマーフェルト量子条件である． 問題は第 2 項であるが，これを見るために A の具体的形を求めなければならない．今の場合これは可能である．実際，定常的な場合の確率保存式は，

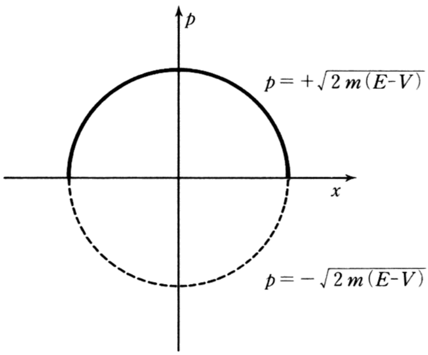


図 5.2 運動量の 2 つの枝．$p=0$ となる (転回点) ところが分岐点になっている．この点において位相の跳びが生じる．

$$\frac{d}{dx}(vA^2)=0 \tag{5.19}$$

となり，これから，直ちに，$vA^2=\text{const}$ となって，A は

$$A=\sqrt{\frac{C}{v}} \tag{5.20}$$

のように求められる．この表式より振幅 A は $v=0$ のところで発散することがわかる．また，絶対値の 2 乗は $|A|^2=C/|v|$ のようになって，速度の大きさ v が小さいところで確率が大きく，反対に v の大きいところで確率が小さいことを示している．A が速度の平方根で与えられていることが重要なところである．今の場合，直線運動であるから速度が 0 になる地点で粒子は運動方向を変える．この事実から，この点は折り返し点 (turning point) とよばれる．したがって，この点において A の位相も $\sqrt{-1}=\exp[i\pi/2]$ だけ変える．折り返し点において速度 (運動量) の符号を変えるのは速度の二つの分枝 $p=\pm\sqrt{2m(E-V(x))}$ の一つから他の一つへ移り変わることを示している．このとき，波動関数はこの二つの枝の 1 次結合で与えられる．

$$\psi(x)=|A|\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\sqrt{2m(E-V(x))}dx\right]$$
$$+|A|\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\sqrt{2m(E-V(x))}dx\right] \tag{5.21}$$

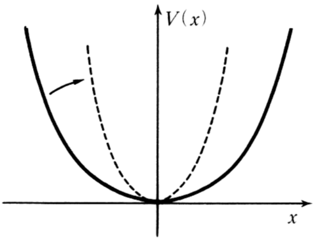


図 5.3　ポテンシャルを少し変形させても転回点の数は変化しない．

ただし，折り返し点での位相の“飛び”(gap) をいれている．さて，一つの折り返し点において位相が$-\pi/2$ だけ飛ぶので，折り返し点が m 個あれば，全部で$-m\pi/2$ の位相のずれが生じる．例えば，調和振動子あるいはそれに似たようなポテンシャルの場合には $m=2$ である．量子条件は，したがって (5.18) より

$$\oint_C pdx = \left(n + \frac{m}{4}\right) 2\pi\hbar \tag{5.22}$$

のように与えられる．ここで，因子 1/2 がトポロジー的な意味をもつ量であって，粒子の (x, p) 空間内での軌道が“x 軸を横切る”回数を 4 でわったものである．調和振動子の場合は横切る回数は 2 であるから $2/4 = 1/2$ になるのである．トポロジー的という意味は，この 2 という数字が，ポテンシャルの特殊な形に依存しないということからくると考えられる．つまり，ポテンシャルの形 $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ を，少し変えても，交点数の 2 には変化がないのである．例えば，放物線に形が似た曲線は自由につくれる．このように，ポテンシャルの形の変化に対して変化がないという意味で，この交点数は位相不変量の一種であるといえよう．最後に，因子 1/2 の物理的意味は調和振動子の場合には零点振動を与える．

5.2 スピンと位相不変量

位相空間は位置座標とそれに共役な運動量の対，つまり，正準変数 (q, p) を座標とする空間である．しかし，量子力学においては (q, p) を用いることがめんどうな，あるいは事実上できない場合がしばしばある．スピンの運動が典型的である．スピン以外でも，我々の 3 次元空間と独立な内部空間に付随した自由度 (例えば，アイソスピン) については，通常の位相空間によって記述するのは適当でない．しかし，このような場合においても自由度を位相空間との類似で幾何学的に記述するための空間を構成できれば望ましいことである．以下において，スピンを例にとって，いわば一般化された位相空間が構成できること，および，それのトポロジー的帰結について調べてみよう．大きさが S のスピン変数は極座標を用いて，

$$(S_x,\, S_y,\, S_z) = (S\sin\theta\cos\phi,\, S\sin\theta\sin\phi,\, S\cos\theta) \tag{5.23}$$

と表せる．これらは半径が S の球面上の点である．スピンを表す球面はしばしばブロッホ球面とよばれる．この球面を位相空間とみなして，スピンの力学を構成することを考える．このためにスピン変数を正準変数に見立て，通常の位相空間の場合からの類推でスピンの位相空間を用意する必要がある．通常の位相空間を特徴づけているのは，1 次の微分形式

$$\omega = pdq \tag{5.24}$$

である．ここでは簡単のために 1 次元の系を考えている．さらに，位相空間中の閉曲線を考えるとストークスの定理を使って，この 1 次形式から 2 次の微分形式をつくれる．

$$d\omega = dq \wedge dp \tag{5.25}$$

この量は位相空間の面積要素である．すでに述べたように，$d\omega$ を閉ループで積分すれば，その領域の面積を与える．スピンの場合に，これの類似を使うと球面上の面積要素は極座標を用いて，

$$d\omega = S \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{5.26}$$

と書ける．これを位相空間としての球面上での 2 次の微分形式とみなそう．さて，これのもとになる 1 次の微分形式はなにか？これを，次のように“推測”によって求める．式 (5.5) を球面上での閉曲線 C で囲まれた領域上で積分したものを考えよう．これは，

$$J = S \int \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{5.27}$$

と表せる．ストークスの定理を逆に使うと，この積分は

$$J = S \oint_C (k - \cos\theta) d\phi \tag{5.28}$$

のように書ける．ここで，k は適当は定数である．いま，曲線 C を $\theta = \alpha$ (一定) にとると，

$$J = 2\pi S(k - \cos\alpha) \tag{5.29}$$

となる．特に，$\alpha = \pi$ のときには，S は球面全体の面積になるので，

$$2\pi S(k+1) = 4\pi S \tag{5.30}$$

これから，$k = 1$ が得られる．したがって，1 次の微分形式は

$$\omega = S(1 - \cos\theta) d\phi \tag{5.31}$$

の形にとることができる．ω をスピン変数で表すと，直接に代入すればわかるように

$$\omega = \frac{S_x dS_y - S_y dS_x}{S + S_z} \tag{5.32}$$

となることがわかる．

次に，(S_x, S_y, S_z) に対する力学を考える．それは，ラグランジュ関数

$$L = S(1 - \cos\theta)\dot{\phi} - H \tag{5.33}$$

で与えられる．また，作用関数は

$$I = \int [S(1-\cos\theta)\dot{\phi} - H]dt \tag{5.34}$$

となる．これは，もちろん，通常の位相空間でのラグランジュ関数

$$L = p\dot{q} - H \tag{5.35}$$

からの類推 (あるいは拡張) である．変分原理

$$\delta \int [S(1-\cos\theta)\dot{\phi} - H]dt = 0 \tag{5.36}$$

より，スピン変数に対する運動方程式

$$\frac{dS_x}{dt} = S_y \frac{\partial H}{\partial S_z} - S_z \frac{\partial H}{\partial S_y} \tag{5.37}$$

が得られる (S_y, S_z に対しては，循環的な入れ替えをしたもの)．これから，さらに，ポアソン括弧が

$$\{F, G\} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} S_i \frac{\partial F}{\partial S_j} \frac{\partial G}{\partial S_k} \tag{5.38}$$

のように定義できる．

［問］：上で定義したポアソン括弧が，通常のものと同じ性質をもつことを確かめよ．

スピン変数で表した位相空間の構造を異なる表記法で表現してみよう．まず，微分形式 ω は南極からの立体射影によって複素座標

$$z = \tan\frac{\theta}{2} \exp[-i\phi] \tag{5.39}$$

を用いると，簡単な計算で，

$$\omega = \frac{iS}{2} \frac{z^* dz - z dz^*}{1 + z^* z} \tag{5.40}$$

と表される．ここで，複素座標を用いるのは式を複雑にするようにみえるが，もっと複雑な力学系において同様の考察をするときには必要になる．また，2 次の微分形式 $d\omega$は，

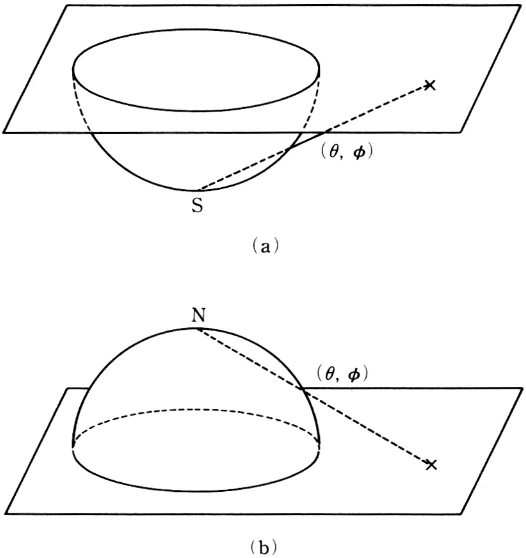


図 5.4　(a), (b) はそれぞれ (a) 南極点からの立体投影, (b) 北極点からの立体投影.

$$d\omega = 2iS\frac{dz^* \wedge dz}{(1+z^*z)^2} \tag{5.41}$$

となる. 角度変数になおすと, ω は,

$$\omega^{\mathrm{S}} = S(1-\cos\theta)d\phi \tag{5.42}$$

となって, 前の結果と一致する. 2 次形式の方はちょうど面積要素になる. z の表示の仕方はユニークでないことに注意しよう. この事実から, 以下にみるような興味ある帰結が得られる.

上の表示は球面の南極から投影したものである (図 5.4). このとき, 南極点が, z 平面での無限遠点を表している. もう一つの表示は北極から投影する方法である (図 5.5). 角度を,

$$\theta \to \pi - \theta, \quad \phi \to -\phi \tag{5.43}$$

に選ぶと, 複素座標は

$$z = \cot\frac{\theta}{2}\exp[i\phi] \tag{5.44}$$

となる．対応する 1 次微分形式は，

$$\omega^{\mathrm{N}} = S(-1-\cos\theta)d\phi \tag{5.45}$$

となるが，面積要素は北極の場合と同じである．二つの ω の間には次の関係がある．

$$\omega^{\mathrm{S}} - \omega^{\mathrm{N}} = 2Sd\phi \tag{5.46}$$

これは，いわゆるゲージ変換の一種である．この関係は何を意味しているのであるか？　そのために，この関係式を θ が一定の線に沿って一周積分してみる．

$$\oint_C \omega^{\mathrm{S}} = \oint_C \omega^{\mathrm{N}} + 2S\oint_C d\phi \tag{5.47}$$

ここで，最後の積分は $4S\pi$ となる．上の関係は指数関数の上にのせると

$$\exp[i\oint_C \omega^{\mathrm{S}}] = \exp[i\oint_C \omega^{\mathrm{N}}]\exp[i4S\pi] \tag{5.48}$$

となる．荒っぽい言い方をすれば，指数関数にのせることによって波動関数が得られるといってよい．すると，この関係の右辺と左辺は同じものを与えると考えてよいので，$\exp[i4S\pi] = 1$ でなければばならない．これから，

$$4S\pi = 2n\pi \tag{5.49}$$

すなわち，

$$S = \frac{n}{2} \tag{5.50}$$

が得られる．結局，これはスピンの大きさの量子化そのものである．上の結果はディラックの量子条件と似た論法であることに注意しよう (次章参照)．つまり，スピンの量子化が位相不変量として再現されるのである．

6 位相不変量の一般理論

前章までに物理現象に関連したトポロジー的な特性量をいくつかみてきた．これらの量は一般に位相不変量 (topological invariant) という概念によって統一的に把握できる．一つの位相不変量が与えられると，それによって特徴づけられる幾何学的対象を少し“変形”してもやはり同じ不変量で特徴づけられる．これはある意味で“安定性”を意味している．物理的にはある不変量を具えた場の配置に小さな摂動を加えてやっても，定性的には同じ不変量をもつ場の配置にとどまることを示している．ただし，この安定性は“力学的に安定である”ことを意味しているわけではない．ここで，このような不変量を構成する一般的な方法について考察しよう．場の配置というのは時空間 (われわれの住む) の点から場の値をとる空間への写像で与えられる．ある特定の場の配置は，それに応じる位相不変量で特徴づけられるので，各々の不変量はある写像のクラスを特徴づけているといってもよい．そこで，問題はこの写像を分類することに帰着する．

6.1　ホモトピーと写像度

6.1.1　基　本　群

写像の分類にはホモトピーという概念が用いられる．はじめに平面上の曲線のつくる集合のトポロジー的性質について復習しておこう．これは2章で複素積分の積分路に関して簡単にふれておいたものである．ある領域(これを X と記そう)を考えて，Xの中の任意の2点が連続的な曲線によって結ばれるとき，その領域は連結とよばれる．いま，連結な領域内に2点 A，B をとると，これら2点を結ぶ曲線は無数にあるが，そのうちの二つをとりだして，それぞれ C_1, C_2 としよう．C_1, C_2 が，連続的な変形によって互いに移り変わり得るものとすると，これらは同じ“クラス”に属すると考えられる．このとき，“C_1 と C_2 は互いにホモトープである”とよばれる．したがって，A, B を結ぶ曲線の全体は互いにホモトープなクラスに分類できる．ここで，異なるクラスに属する曲線は互いに連続変形によっては決して移れない．物理の応用に関して興味があるのは曲線が閉曲線の場合である．定点 X_0 から出発してもとに戻る閉曲線の全体を考えるとやはり連続変形によって移り変われるか否かによってクラス分けができる(このクラスは数学用語では同値類とよばれる)．これらのクラスを記号で $\pi_1(X, X_0)$ と書く(括弧のなかの，記号 X_0は始点と終点を明示するためである．特定の点に依存しない場合は，単に$\pi_1(X)$ と書く)．$\pi_1(X, X_0)$ は群の構造をもっており，基本群とよばれている．少し詳しくいうと，次のようになる．閉曲線の集合は，区間: $I = [0, 1]$ から一変数の連続関数

$$f(t) : [0, 1] \longrightarrow C \tag{6.1}$$

によって写像される．ここで，区間の両端は次のように基点 X_0 に写される．

$$f(0) = f(1) = X_0 \tag{6.2}$$

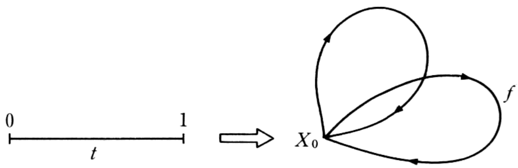


図 6.1 区間 $[0,1]$ からの連続写像によって得られる曲線群. $f(0)=f(1)=X_0$. X_0 は基点を表す.

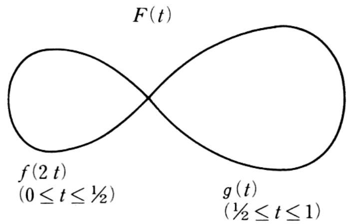


図 6.2 2つの写像を続けて行う. これが群演算を定義する.

写像関数 $f(t)$ を変えていくことにより, X_0 を基点とする閉曲線の族が得られる (図 6.1 参照). ここで, これらの曲線の族が実際に群の構造をもつことを簡単に説明しよう.

図 6.2 を見てみると, 基点 X_0 から出発する閉曲線 f, g を引き続き行ったものが, やはり X_0 を基点とする閉曲線になることは明らかである.

(i) 群の演算の積 $f \cdot g(t)$ を

$$F(t) \equiv f \cdot g(t) \begin{cases} f(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ g(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases} \tag{6.3}$$

によって定義しよう. 2倍の速度で閉曲線 f, g 上を動いて原点に戻るわけである. 実際, この積は, $F(0)=F(1)=X_0$ を満たす.

(ii) $f(t)$ の単位元は, $f(t)=X_0$, つまり恒等写像によって定義する.

(iii) $f(t)$ の逆演算は，$f^{-1}(t)=f(1-t)$ によって定義する．つまり，同じ曲線を逆向きにたどったものである．

(iv) 結合則 $f\cdot(g\cdot h)(t)=(f\cdot g)\cdot h(t)$ を満たすことも直感的にわかると思うが，証明は読者への演習問題としよう．

(v) $f\sim f'$ かつ $g\sim g'$ とすれば，$f\cdot g\sim f'\cdot g'$．これも図 6.2 の上で直感的に明らかであろう．これより，同値関係で結ばれているものは同一視し，類別することができる．

基本群は“ホモトピー群”のうちで最も簡単であるが重要な対象である．特に，$\pi_1(X)=e$ (e は単位元)，つまり単位元のみからなるとき，この領域 X は“単連結”とよばれる．つまり，すべての閉曲線が一点に収縮できる．

以上の考えは平面だけでなく 3 次元空間あるいはもっと高い次元に拡張できる．しかし勝手に選んだ空間の基本群を計算することは一般にたいへん難しい問題である．例えば，3 次元空間のなかに 1 次元の閉曲線を連続写像で“埋め込んだ”ものを結び目とよぶが，結び目の基本群を計算することは一般に非常に難しい．

[例 1]：$\pi_1(R^2)=0$. つまり 2 次元平面の基本群は自明 (単位元のみ) である．明らかにただの平面中の任意の閉曲線は一点に収縮することができるからである．

[例 2]：$\pi_1(R^2-P)=Z$(Zは整数の集合)． 直感的には平面上に“無限に高い杭”を立て，この杭に輪 (閉曲線) を巻きつける．この輪は杭からはずすことはできないことは明らかである．これから，π_1 は自明でないことがわかる．別の観点からいうと，関数論の留数定理である．これは 2 章でふれておいたが，もう一度述べておこう．関数

$$f(z)=\frac{1}{z} \tag{6.4}$$

を考えると，これは $z=0$ に 1 次の極をもつ (もちろん，$z=0$ は，どこにとってもよい)．原点を，n 回囲む閉曲線 C に沿った

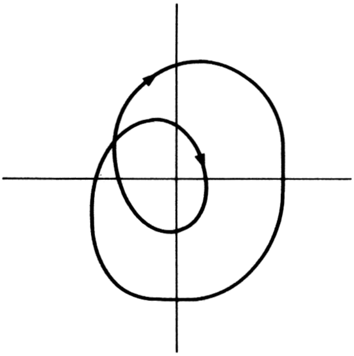


図 6.3 極(原点)のまわりの巻数が 2 の閉曲線.

積分は,

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi n \tag{6.5}$$

となる．閉曲線を原点のまわりを n 周する円周に置き換えてよいことから，$z = \exp[i\theta]$ によって角度変数 θ の積分になおしたときの積分範囲を 0 から $2n\pi$ となることからいえる．この例は 2 次元のトポロジーと関数論のかかわりを表している．

[例 3]：$\pi_1(S_1) = Z$ ．直感的には円周に糸を巻きつけていくこと操作によって明らかであろう．右向きに n 回巻きつくとき n を対応させ，左向きに n 回巻きつくときには $-n$ を対応させればよい．

[例 4]：$\pi_1(T^2) = Z \times Z$．ここで $Z \times Z$ の意味は二つの整数の組を表す．2 次元トーラスは 1 次元トーラス (つまり，円周) の二つの直積と同等である．一般に，二つのものの直積で与えられる対象の基本群はそれぞれの対象に対する基本群の直積で与えられる (証明が省略するが，直感的には了解できるであろう)．この例では，円周の π_1 は Z であるので，$\pi_1(T^2) = \pi_1(S) \times \pi_1(S) = Z \times Z$ となる．

[例 5]：$\pi_1(S^2) = 0$．球面上に閉曲線を描くとこの曲線は明らかに一点に縮められる．あるいは球面上の一点に “無限に高い杭” をたて輪をはめたとして，この輪がはずせるかどうかを見ればよい．

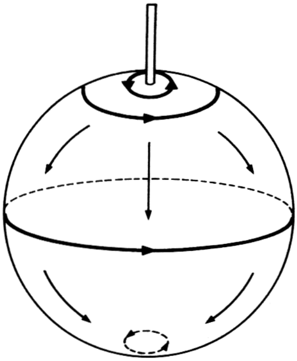


図 6.4　球面の上に立てた“杭”から輪(閉曲線)がはずせる.

球面の場合には明らかに輪は無事に球面からはずすことができる．この例は図 6.4 で視覚的にながめるとよくわかる．

[例 6]：一般に基本群は非可換な群である．$\pi_1(R^2 - P_1 - P_2)$，つまり平面から二つの点を除いた領域の基本群は非可換群である．この証明は省略する．

6.1.2　高次元ホモトピー群

$\pi_1(X)$ の出発点になったのは空間 X の基点をもつ閉曲線(ループ)であった．上のアイデアを 2 次元に拡張しよう．直感的にいえば区間の代りに正方形の区域から閉曲面への写像を考えればよい．

$$f(u, v) : I^2 \longrightarrow S^2 \tag{6.6}$$

ここで,

$$I^2 = [(u, v); 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1] \tag{6.7}$$

1 次元写像において両端が同一点 X_0 に写されるということに対応して，今度は正方形の周辺が基点 X_0 に写されるようになる．図で描くと図 6.5 のようになる．正方形の内部の点を球面上の点の対応させるとして，ひとまず球面上から正方形の部分

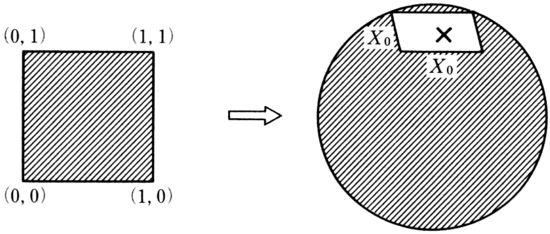


図 6.5 正方形の区域から球面への写像. ×印のまわりの小さな四角形領域以外が正方形領域のコピーである. この四角形を縮めていくと正方形の内部が球面全体に写像される.

を除く (球面上の正方形の周上で, X_0 を印をつけたのは, これが X_0 に写ることを強調したかったからである). しかるのちにこの除いた部分を一点に縮めていき, 最後にその点が X_0 になるようにする. つまり, はじめに考えた正方形はその周上を定点 X_0 に同定したときの球面に同相であって, この球面から関数 $f(u, v)$ によって空間 Xへ写像するわけである. 写像関数 f を変えていくと, X_0 を基点とする 2 次元の (球面に同相な) 閉曲面の全体が得られる. この閉曲面に, 同値類で類別をいれると群が得られるが, それは 2 次元ホモトピー群とよばれて, $\pi_2(X, X_0)$ と書かれる.

正方形と球面の同一視に関しては少し異なるが似た別のやり方がある. それは前章の図 5.5 において示した "立体射影" によるものである. 平面上に半球を赤道面が平面上にくるようにおく. 北極から射影をしたときに, 球面を貫く点を角度で表して, (θ, ϕ) として, 平面上に落ちる点を (x, y) とすると, これら二つの点の座標の間には

$$x = \cot\frac{\theta}{2}\cos\phi, \qquad y = \cot\frac{\theta}{2}\sin\phi \tag{6.8}$$

の関係があることがわかる. 見やすいように図 5.5 の断面図を与えておこう (図 6.6) ここで重要なことは北極 $\theta = 0$ が $x = \infty, y = \infty$ になることである. つまり, 無限遠方が球面の北極

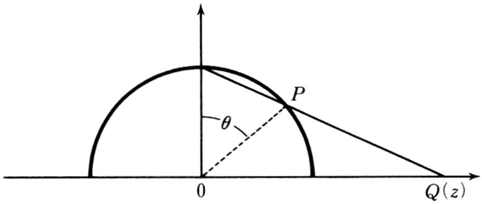


図 6.6 立体射影(図 5.4(b))の断面図．この場合，北極から射影している．

点として実現される．無限遠方が正方形の周上に対応することに注意しよう[1]．これによって球面と無限遠点を含む平面上の点が完全に 1 対 1 に対応することがわかった．この対応は "一点コンパクト化" とよばれている．具体的に実現している模型はベクトル場を球面上で考える場合である．つまり，平面上に 3 次元的なスピンが配列されていると想定する．スピンの大きさを S とすると，$S_x^2+S_y^2+S_z^2=S^2$ である．これは半径が S の球面である．そこで，(x,y) からスピンを表す球面への写像が考えられるのだが，無限遠方のベクトル場の値がある値に収束するなら，(x,y) 平面は球面にコンパクト化されるので，平面から球面への写像は球面から球面への写像とみられる．

6.1.3 写 像 度

写像を特徴づける量について考察しよう．はじめに，2 次元 (平面) 空間でおこる現象をとりあげよう．2 次元の物理系といえば，かつては現実の 3 次元の現象を模倣した単なるおもちゃと考えられていたが，最近では超流動薄膜や 2 次元半導体などのように現実的な物理系として実現されることがわかってきている．具体的な模型として場の値が円周上でとる場合を考えよう．場の値を

[1]無限遠方という漠然とした言い方を数学的に明確な意味をもたせた概念にするため無限遠点とよぶ．

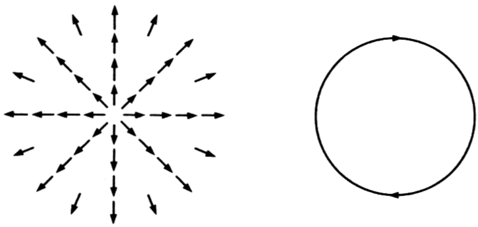
$$\phi_1(x,y) = \cos\theta(x,y),\ \phi_2(x,y) = \sin\theta(x,y) \tag{6.9}$$

のように角度で表した，つまり，大きさが1の2次元スピン模型である．これは平面上の各点に2次元的なスピンを配置したものと考えられる，言い替えれば，平面上の点から場の値の空間への写像と考えられる．ここで大事なことは，一般にはこの写像には“特異点がある”事実である．具体的には2章であげた“渦”が特異点となっている．この点をPとしよう．Pのまわりのスピンの配置を考えてみよう．具体的にPのまわりの閉曲線上を動いてもとに戻ったときにスピンの方向がどのように変化していくかを視覚的にみてみよう．このために，空間の各点でのスピンの始点を，すべて一つの点(原点)に移動して，それを始点としてスピンベクトルを描いてみる．すると，そのスピンの終点は半径が1の円周上にのる．これをホドグラフとよぼう．そこで，この終点の円周上での動きをみるとトポロジー的に分類される．図6.7(a)の場合，円周上を一周するとホドグラフも円周となってスピンはこれを一周する．それゆえ，巻数は1となる．図6.7(b)では，スピンはつねに一定の方向を向いているので，当然巻数は0となる．図6.7(c)の場合スピンは円周上を動くが，一周はしないで元に戻る．この場合も基本群の用語を使えば，一点に収縮する．つまり，巻き数が0である．図6.7(d)は少し複雑であるが巻き数が2を与えることが確かめられる．

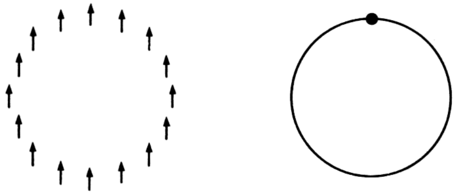
以上の事実を表現する量が写像度の概念である．ホドグラフ上の点は，ある基準の点からはかった角度θで表されるが，これはスピンが配置する2次元空間(つまり，物理空間)のなかでの円周を表す角度変数αの関数とみられる．$\theta(\alpha)$．そこで，写像度(または，スピンベクトルの指数)を

$$N = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} \tag{6.10}$$

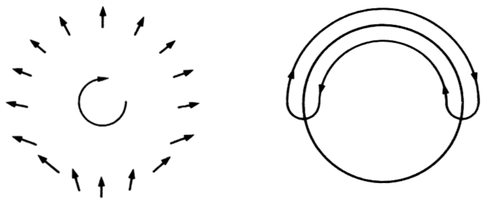
として定義する．これは物理空間のなかで一周したとき”場の空間”としての円周(ホドグラフ)上で何回転するかを直感的に



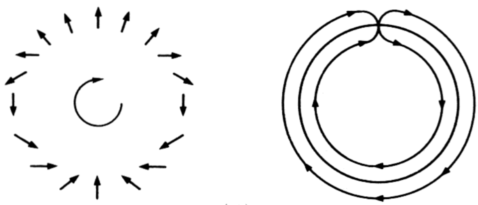
(a)



(b)



(c)



(d)

図 6.7　2 次元スピンベクトルの特異点のまわりの配位図とそのホドグラフ. (a) 1 回転, (b) ベクトルは一定方向を向いているので回転数は 0. (c) 途中で引き帰してもとに戻るので, やはり回転数は 0 になる. (d) 空間において 180 度回転したときにスピンは 1 回転するのでこの場合の回転数は 2 である.

与えるものである．上の議論で，物理空間中の閉曲線は円周に連続的に変形できる曲線であれば，任意にとってよいことに注意しよう．上のスピン模型の場合には写像度は，それぞれの場合について，(a) $N=1$，(b) $N=0$，(c) $N=0$，(d) $N=2$ によって与えられる．

写像度の別の表現を与えてみよう．上でとりあげたスピンの場合，つまり円周 S^1 から S^1 への写像をとりあげよう．このときに，互いに異なる写像は円周を回転する回転数 n で特徴づけられた．ただし，n が負のときには正のときと反対にまわりと約束する．S^1 から S^1 への写像を，

$$\theta = n\alpha \tag{6.11}$$

のように定義してみよう．ここで，α,θ は，それぞれの円周角を示す．明らかに，α が，一周すると θは n 周する．2π 回転すると，$2n\pi$ 回転するといってもよい．これは

$$\frac{1}{2\pi}\int d\theta = \frac{n}{2\pi}\oint d\alpha = n \tag{6.12}$$

のように積分で表示できる．つまり，二つの円周の "体積比" を表しているとみることができる．これは，複素関数

$$w = z^n \tag{6.13}$$

に対する偏角の定理

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{dw}{w} = n\oint_C \frac{dz}{z} = 2n\pi i \tag{6.14}$$

とみることもできる．ここで，$\tilde{C},C$ はそれぞれ，w,z 平面の原点を囲む任意の閉曲線でよいが，特に $z=\exp[i\theta]$ にとれば，上の角度の関係がでてくる．基本群に関するこの例は，一般に "基本の写像" があって，写像度は，ちょうどこの基本写像を何回 "覆う"(cover) するかという回数を表すとみることができる．

次に，このアイデアを一つ次元を上げて 2 次元の球面から 2 次元の球面への写像に適用してみよう．(以下で述べる議論は数

学的には厳密なものではない．物理的に理解しやすいような概念的説明であることを断っておく)．具体的なモデルとしては平面上で定義された3次元スピンをとりあげる．上でみたように，これは平面のコンパクト化によって球面から球面への写像とみられる．空間としての球面の座標を (α, β) とし，スピンを表す球面の座標を (θ, ϕ) とする．いま，基本の写像を

$$\theta = \alpha,\ \phi = \beta \tag{6.15}$$

としよう．これから，n 倍写像を

$$\theta = \alpha,\ \phi = n\beta \tag{6.16}$$

のように定義する．ここで，θ と α は等しくとっている．写像の回数をはかる量は，今度は球面の表面積の比で与えられ，

$$\int \sin\theta d\theta d\phi = n \oint \sin\alpha d\alpha d\beta \tag{6.17}$$

が成立する．これから，写像度は予想どおり n となることがわかる．これをホモトピーの用語でいえば，

$$\pi_2(S^2) = Z \tag{6.18}$$

と書かれる．さらに高度な例として，3次元球面から，3次元球面への写像度 $\pi_3(S^3)$ も計算できて，

$$\pi_3(S^3) = Z \tag{6.19}$$

となることが知られている．

6.2 ファイバーバンドル

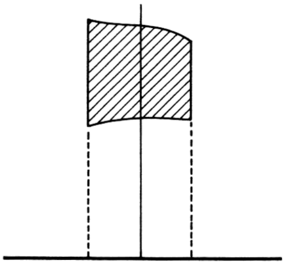
前節の最後でみたように，写像度を具体的に表現するのは積分量である．写像度はホモトピー群の計算と密接に関連しているのであるが，これを系統的に計算するのは位相幾何学での難しい問題である．一方，積分量はストークスの定理が象徴的に示

しているように積分のなされる閉経路のトポロジー的特性を数式化したものといえる．この考えを組織的に展開したものがファイバーバンドルの概念と，それから誘導される特性類といわれる量である．

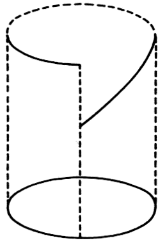
6.2.1 ファイバーバンドルの構成

ファイバーバンドルの概念は現代の幾何学 (微分幾何学) においては決定的に重要な役割を演じているようであるが，これを数学者のやるように定義，構成することは物理での応用にとって得策ではない．そこで直感的に説明することを試みる．そのために 4 章においてとりあげた幾何学的位相においてあらわれた接続の考えを思い出してみよう．断熱定理において中心的な役割を果たした対象は外部パラメーターを含んだ状態 (波動関数) であった．これは，パラメーター空間の各々の点において複素数値関数のベクトル空間が貼り付けられたものとして視覚化できる．パラメーター空間を Mとして，そこでの点 x における波動関数は $\psi_n(q,x)$ と書かれる．q は内部変数を表す座標である．x を固定したとき，それに対応した断熱状態を表すベクトル空間 (量子数 n をもつ) が一つできるということである．このベクトル空間をパラメーター空間のある閉曲線に沿って全部寄せ集めたものを考えると，これが，ベクトルバンドルとよばれるものになる．数学用語に焼き直すと，量子断熱定理の例では波動関数の位相にあたるものはファイバーとよばれる．そのベクトル空間全体はファイバー空間とよばれ，F によって表す．パラメーター空間にあたるものは底空間とよばれる．また，ファイバー空間を底空間に沿って寄せ集めたものはファイバーバンドルとよばれ，波動関数にあたるものは，ファイバーバンドルの切断面 (cross section) とよばれる．ここで注目すべき事実は，点 x のまわりでは，局所的にファイバーバンドルは，

$$E = U \times F_x \tag{6.20}$$



(a)



(b)

図 6.8 (a) ベクトルバンドルの概念図，(b) 図 4.6 と同様，ホロノミーの概念図に一致.

のように，直積で表し得ることである．この事実を，“局所自明性” とよぶ．ここで，U は x を含む近傍である．また，F_x は，点 x の上に立った “棒” である．つまり，x の近くで “高さ” が F_x の “短冊” を思い浮かべて，そう間違いではないであろう (図 6.8(b))．このように，局所的に直積で表されたものを貼り付けていけばバンドル全体が得られると予想されるが (貼り付け方法は以下で明らかになる)，ここで非常に重要なことは，このようにして得られるバンドルが全体としては “自明” でなくて，いわば “ねじれている” 場合があるということである．

次の例は，ファイバーバンドルのねじれの様子を視覚的にとらえることのできるもっとも簡単かつ重要な例である．

[例 1]：メビウスバンドル (図 6.9)

底空間として区間: $[0,2\pi]$ (あるいは，円周 S^1) を考える．その上に，“区間ファイバー” $[-1,1]$ を立てていく．円周の各点の近傍では，$U\times[-1,1]$ とみられる．自明なバンドルとして，この局所バンドルをそのまま貼り続けたものを考えるとバンドルは円柱状になる．しかし，途中でファイバーをひねって貼り合わせると自明でないバンドルが得られる．七面倒くさい言い方であ

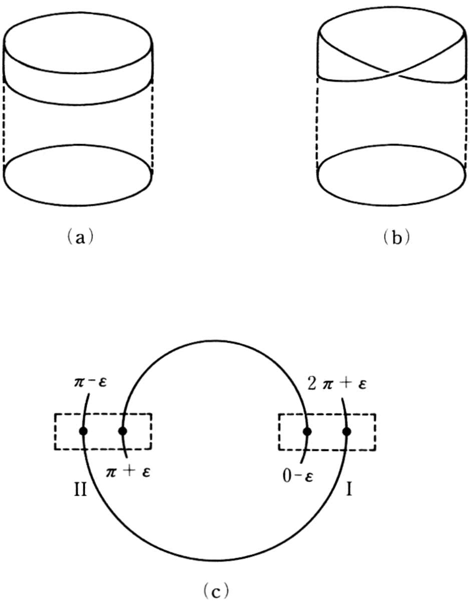


図 6.9 メビウスバンドル．下方の円周は底空間を表す．(a) ねじりがないもの．つまり通常の帯の両端をつないで閉じさせたもの，(b) 1 回ひねったもの(つまりメビウスの帯)，(c) 両端での変換(つなぎ)の様子を模式的に描いたもの．領域 I においては，ファイバー座標の変換は，$x_+ = x_-$，領域 II においては $x_+ = -x_-$ にとる．

るが，メビウスの帯をつくることに他ならない．このようにいえば直感的に“ねじれている”様子が理解できるであろう．具体的な構成は次のようにする．まず，円周を考えて，これを二つの部分にわけ，それぞれ，$S_+ = (0-\epsilon, \pi+\epsilon)$, $S_- = (\pi-\epsilon, 2\pi+\epsilon)$ としよう．これら二つの領域で，直積 $S_+ \times F$, $S_- \times F$ をつくる．これらは，$\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ の近傍で重なる．この近傍をそれぞれ I，II とよぼう．このように，二つの近傍ができたところで，もう一つの重要な概念が登場する．それはファイバーの間の変換 (transition function) という概念である．一般的にいえば，底空間のある点の近傍で定義されているファイバーを同じ近傍で定義される別のファイバーとの間に関係をつける方法である．こ

の例では，それぞれの領域でのファイバー上の座標 x_+, x_- に対して，重なる領域で変換関係を次のように設定する．I において，$x_+ = x_-$，II において，$x_+ = -x_-$ と貼り合わせる．このように，ファイバー間の変換関係を設定することによってバンドルの構成が完成する．

［例 2］：モノポールバンドル (図 6.10)

底空間として 2 次元球面 S^2 を考える．ファイバーとして U(1) 群 (つまり，位相 $\exp[i\alpha]$ のつくる群) をとる．S^2 を二つの半球にわけて，それぞれの半球上でバンドルをつくる．そのために，次のように底空間およびファイバーに座標を導入しよう．

$$B(+) = ((\theta, \phi), \exp[i\alpha]), \qquad B(-) = ((\theta, \phi), \exp[i\beta]) \quad (6.21)$$

例 1 と同様に，ファイバーの間の変換関数を，次のように構成できる．つまり，二つのバンドルの共通部分は赤道であるから，赤道に沿った経度座標 ϕ によって二つのファイバー $(\exp[i\alpha], \exp[i\beta])$ は関係づけられると期待される．その関係は

$$\exp[i\beta] = \exp[in\phi]\exp[i\alpha] \quad (6.22)$$

によって与えることができる．変換関数の一価性により，n は整数値である．この整数値の違いがバンドルの違いを特徴づける．つまり，バンドルのねじれの度合いを与えるのである．物理的には，n はモノポールの強さ (磁荷) を与える (以下の議論を参照せよ)．$n = 0$ の場合はバンドルは自明になる．

以上のことをまとめると，ファイバーバンドルは，三つの要素からなる．

(1) 底空間 M，　(2) ファイバーおよび，ファイバー空間 F，

(3) 変換関数．

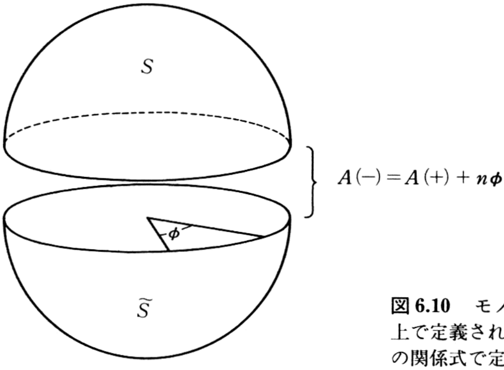


図 6.10 モノポールバンドルの概念図．2つの半球の上で定義されたファイバーの間の変換は位相因子の間の関係式で定義される．

6.2.2 接続およびそれに対応する位相不変量

ファイバーバンドルはゲージ場を通じて物理学に登場した．ゲージ場の概念は，もともとは電磁場に内在しているゲージ不変性の考えをいわば逆手にとってある物理的対象に大域的な不変性が存在する時，それを局所的な不変性に拡張するようにすると新しい“場”の導入が必然的に要求されるというのが基本的構想であった．ゲージ場はファイバーバンドルの言葉でいうと，“接続”の概念と結びついている．接続の概念を説明するのに，もう一度量子断熱定理を思い出してみよう．非可積分的位相を含む断熱状態

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle \exp[i\alpha] \tag{6.23}$$

に対する平行移動の条件

$$\langle\psi_n|d|\psi_n\rangle = 0 \tag{6.24}$$

を要請すると，位相 α は，

$$\alpha = \int a_i dx_i \tag{6.25}$$

と計算できて， 場 a_i は

$$a_i = \left\langle n \left| \frac{i\partial}{\partial x_i} \right| n \right\rangle \tag{6.26}$$

で表せ，接続を与える．断熱状態 $|n\rangle$ に位相変換 $|n\rangle \exp[i\beta]$ を課すことによってわかるように，

$$a_i \to a_i - \partial_i \beta \tag{6.27}$$

なる変換をうける．これはゲージ変換そのものに他ならない．このようにして，接続の概念を“一般的なゲージ変換”に従うようなバンドル空間上に定義される“場”，つまり，ゲージ場であるという風に定義できよう．ここで，以下の話での準備のために，接続に対応する微分形式を導入しておく．それには，再び，断熱状態を例にとり，位相変換を施した状態 $|\psi_n\rangle = |n\rangle \exp[i\beta]$ に対して，

$$\omega = \langle \psi_n | id | \psi_n \rangle = \langle n | id | n \rangle - d\beta \tag{6.28}$$

が得られるが，これより，接続を表す微分形式を

$$\omega = Adx - d\beta \tag{6.29}$$

と定義する．

ゲージ場が導入されると，“ゲージ場の強さ”が定義される．つまり，電磁気学の例でいうと，電磁場に他ならない．これは，幾何学的にいえば，接続が導入されると，対応する“曲率”という概念が誘導され，微分形式で，

$$F = dA \tag{6.30}$$

と表せる．これは正則なゲージ変換 $A \to A + df$ に対して不変になる，つまり同じ場の強さを与える[2]．

このようにして，接続，および，それから導かれる曲率を定義したので，上に構成したファイバーバンドルの例に対して具体的に構成してみよう．

［例 1］：モノポールバンドル上の接続

それぞれの半球上で，微分形式を

[2]ここで，正則というのは，“基礎になる空間の全体でそうなっているというのではない”ということに注意しよう．それは以下のモノポールの例で明らかにされる．

$$\omega = A(+) + d\alpha$$
$$= A(-) + d\beta \tag{6.31}$$

のように定義する．ファイバー間の関係から，

$$A(+) = A(-) + d\beta - d\alpha$$
$$= A(-) + nd\phi \tag{6.32}$$

がでてくる (式 (6.22) 参照)．ここで，微分形式 $A(\pm)$ は，それぞれ

$$A(\pm) = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos\theta)d\phi = \frac{n}{2r(z \pm r)}(xdy - ydx) \tag{6.33}$$

で与えられる．これらは，それぞれ，上半球，下半球において正則 (つまり特異点がない) である．したがって，上の関係は二つの半球で定義された接続の間のつなぎを与えている．これによって，球面全体にわたるバンドルが構成できたことになる．上の関係を赤道に沿って積分してみよう．

$$\oint_C A(+) = \oint_C A(-) + n\oint_C d\phi \tag{6.34}$$

ここで，線積分を面積分になおすときに 2 通りの表現があることに注意しよう．つまり， 上半球での面積分

$$\oint_C A(+) = \int_S dA(+) \tag{6.35}$$

および，下半分での面積分

$$\oint_C A(-) = -\int_{\tilde{S}} dA(-) \tag{6.36}$$

に書ける．ここで，

$$dA(\pm) = \sum_{ij} F_{ij} dx_i \wedge dx_j$$
$$= \frac{n}{2r^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

$$= \frac{n}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{6.37}$$

F は上で定義した曲率 (実は電磁場) である．上の二つの場合に対して同じ表式になるのである．これは極座標を使って，

$$F = \frac{n}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{6.38}$$

と書ける． したがって，式 (6.34) は

$$\int_S dA(+) + \int_{\tilde{S}} dA(-) = n \oint_C d\phi = 2\pi n \tag{6.39}$$

となり，$S + \tilde{S} = S^2$ に注意すると，

$$\oint_{S^2} F = \frac{n}{2} \oint \Omega = \frac{n}{2} \times 4\pi \tag{6.40}$$

となる．これは，適当な単位を用いれば，ディラックの量子条件そのものになる．つまり，上で述べたことは，3 章で導入したディラックのアイデアをファイバーバンドルを使って定義しなおしたものである．曲率を積分した量は，このように位相不変量を与えることになるが，これは特性類といわれるものになる．残念ながら，一般の特性類の定義については本書の範囲ではふれることができない．

[例 2]：メビウスバンドル上の接続

これは接続が解析的な表式で表すことができない例である．しかし，全体的な“ねじれ”は定義できる．これは，Whitney-Stiefel 類とよばれるものである[3]．4 章で述べたロンゲット・ヒギンズの位相に対しては連続関数としての接続は定義できないことを注意したが，この場合に相当している．

[3] T.Eguchi,P.B.Gilkey and A.J.Hansen : Phys.Rep.**66** (1980)213. 参照.

7　量子渦，場の理論とトポロジー

この章では，凝縮物質系において発現するトポロジー的欠陥 (defect)，および，場の理論のある種の模型において顕在するトポロジー的対象について述べる．

7.1　量子渦のトポロジー

結晶などにおいて見られるトポロジー的欠陥は一般に物質系の秩序度を記述する秩序場 (order parameter field) の特異点として記述される．通常，それは結晶における格子欠陥，転位などを対象としているのであるが，結晶以外の現象にも現れる．以下では前章までの話と整合性を保つために量子流体における渦の現象について述べる．

非常な低温において，ヘリウムのような軽い不活性原子の気体は固化されずに液体状態にとどまる[1]．ここで，著しい事実はある条件のもとで特殊な流体状態，すなわち超流動状態 (粘性のない状態) になることである．これが超流体である．ここで通

[1]液体ヘリウムには2種類ある．^{4}He と^{3}He である．前者は，構成原子がボーズ粒子であることから，ボーズ液体とよばれている．一方，後者は構成原子が (同位元素であるが) フェルミ統計に従う．このように，両者のあいだには，著しい相違がある．ここでは前者のボーズ液体を取り上げる．

常の流体のように渦が生じるのであるが，量子的流体に生じる渦の現象は一種のトポロジー的欠陥である．もちろん，超流体は結晶を形成しているわけではないが，超流動を示す状態 (基底状態付近の状態であるが) を規則的 (秩序的) な状態を表していると考えるならば，渦はこの秩序状態をこわす欠陥の役割をするといえよう．

7.1.1　2 次元の量子渦

ボーズ粒子からできた超流体のマクロな状態を記述するのはマクロ波動関数$\psi(x)$ の概念である．詳しい説明は専門書に譲るが，簡単にいえばボーズ粒子の場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ の多体系の量子力学的基底状態での期待値で与えられる量である．これは，ψ の絶対値の 2 乗が超流動状態にあるボーズ粒子の数密度になるという直接的な意味をもっている．通常の量子力学では波動関数はその絶対値の 2 乗が粒子の存在確率という意味をもっていたのとは決定的に異なる．ここで，ψ が複素数であることが本質的に重要である．ψ が複素数であることから，これを絶対値と位相によって表せる．

$$\psi = |\psi| \exp\left[i\frac{m}{\hbar}f\right] \tag{7.1}$$

ここで，m はヘリウム原子の質量であって後の便宜のためにつけておいた．マクロな量子状態において粒子が "ない" 場所は $\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ によって与えられる．この場所は量子力学の波動関数と同じくノード (節) をうつ点であって，この点において位相は意味を失う．このことはノードがある意味で特異点となることを暗示している．波動関数が複素数であることから，ノードの条件式は実数に直すと二つの関係式が得られる．

$$\mathrm{Re}\,\psi(x,\,y,\,z) = 0, \qquad \mathrm{Im}\,\psi(x,\,y,\,z) = 0 \tag{7.2}$$

これらは 3 次元空間において曲線を定義する．この曲線は渦糸を表すと考えられる (渦糸曲線については次節を見よ)．以下で

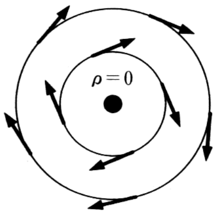


図 7.1 渦のある場のまわりの様子.

は，流体が z 方向に一様である場合に限定よう．このときには物理量はすべて変数 x, y のみの関数で与えられる．これは本質的に 2 次元流体を考えているのと同じである．2 次元に限ればノードを打つ点は渦の中心座標を与えるとみられる．渦のまわりでの波動関数の様子を見てみよう．特に，その位相に注目しよう．まず，渦以外の場所の振る舞いを考察しよう．通常点のまわりに小さな閉曲線を描いてその曲線に沿った位相変化をみると，波動関数の連続性から閉曲線を一点に縮めていくと位相変化は 0 になる．次に，渦を中に含む閉曲線の場合には渦の中心において位相は不連続的な“トビ”をもつことができる．このトビは，2π の整数倍である．

位相の物理的な意味を考えてみよう．超流体の自由エネルギーは，次のような形で表せる (これは，ランダウ-ギンツブルグの自由エネルギーとよばれるものである).

$$F = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* + V(|\psi|) \right] d^2x \tag{7.3}$$

に，$|\psi| = \sqrt{\rho}$ として式 (7.1) を代入すると，第 1 項から

$$T = \int \left[\frac{1}{2} m\rho (\nabla f)^2 + \frac{\hbar^2}{8m\rho} (\nabla\rho)^2 \right] d^2x \tag{7.4}$$

が得られるが，第 1 項は通常の流体力学の公式との類似によって超流体の運動エネルギーとみられる．ここで，$\rho = |\psi|^2$ は通常の流体における密度に相当するものである．この表式より位相の勾配 (gradient) $\nabla f = \boldsymbol{v}$，は超流体の速度場を与えるとみら

れる．位相関数が (x, y) の任意関数の場合には微分の順序を替えてもよい[2]，つまり，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{7.5}$$

に注意すると

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \tag{7.6}$$

を満たされる．あるいは，

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{7.7}$$

つまり， 渦度が 0 になる．一方，渦が (x, y) 平面の原点に渦が 1 個ある場合の速度場について考えてみよう．このとき，位相関数として

$$f = \mu \tan^{-1} \frac{y}{x} \equiv \mu\theta \tag{7.8}$$

と選んでみる．これは比例定数 μ を除いて原点から測った極角そのものであって無限多価関数になる．μ は渦の強さを表す量である．これは 2.3 節の例であげたものと同じである．したがって，速度場は

$$\boldsymbol{v} = \nabla f = (-\mu\frac{y}{r^2}, \mu\frac{x}{r^2}) \tag{7.9}$$

で与えられる．渦を内部に含む閉曲線に沿って元の位置に戻ったときの波動関数の位相変化は，

$$\Delta \arg\psi = \frac{m}{\hbar} \oint_C \mu \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{x} \tag{7.10}$$

となり，これは，波動関数 ψ に 1 価性の条件を課すと，2π の整数倍になる．したがって，n を整数として

$$\frac{m}{\hbar}\mu \cdot 2\pi = 2\pi n \tag{7.11}$$

が得られる．あるいは，比例定数 μ が

---

[2] ただし，位相関数は特異点をもたないとする．

$$\mu = \frac{\hbar}{m} n \tag{7.12}$$

によって与えらる．これが“オンサガーの循環の量子化”といわれるものである．この式は渦が量子化されているということの直接的な表現である．渦の量子は $\hbar/m$ という量を最小単位として生成消滅をすると考えられる．1 個の渦が存在する場合に波動関数 ψ の具体的形がどう決められるかをみてみよう．渦の中心は (x, y) 平面の原点にあるとしよう．すると自由エネルギーは，

$$F = \int \left[\frac{1}{2} m\rho(\nabla f)^2 + \frac{\hbar^2}{8m\rho}(\nabla\rho)^2 + V(\rho) \right] d^2x \tag{7.13}$$

となる．F が極値をとるという条件から ρ の満たすべき方程式が導かれる．これは変分原理に他ならない．境界条件としては，原点において，$\rho = 0$ また $r \to \infty$ において，$\rho \to \rho_0$ (ここで，ρ_0 は一定値) を課しておく．あるいは，原点での 0 と無限大での一定値をつなぐ試行関数として適当なパラメーターを含むものを選んでおいて，F に代入することによってパラメーターを極値条件より決めるというやり方もできる．

7.1.2 渦糸のトポロジー

次に 3 次元の渦についてふれておこう．3 次元空間中の渦は理想化していえば太さのない糸状をしている．糸は自由自在に変形し一般に複雑に絡み合うであろう．その意味で，2 次元の渦に比べてはるかに複雑な対象物である．渦を表す量は今度も渦度であるが，これは一種の線条電流のようなものであると思ってよいであろう．渦度は

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \tag{7.14}$$

で定義され，電磁気におけるアンペールの法則

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{7.15}$$

の対応物とみられる．つまり，磁場と速度，電流と渦度の間の対応関係である[3]．言い替えれば，渦度が速度場の源になっている．流体の中に閉じた渦の輪がいくつかできた場合を想定してみよう．これらの間の絡まりを，最も簡単な2個の渦輪に対して表現することを考えてみよう．電流と渦糸の対応関係を仮定すると渦輪どうしの絡まり数は，いわゆる，“ガウスの絡まり数”(linking number) というもので記述される．

まず，ガウスの絡まり数について説明しよう．実は，アンペールの法則が位相不変量と関係するのであるが，それは積分形で

$$Q = \oint_C (\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}) = \int_S (\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}) \tag{7.16}$$

と表せる．右辺の積分は閉曲面を貫く電流ベクトルのフラックスであるが，もし，電流が線条になっているとすると，この量は　S を貫く線条電流の本数を表しているとみることができる．線条電流$\boldsymbol{j} = j\, d\boldsymbol{l}/dl$はデルタ関数を使って，

$$j = \sum_i J_i \delta(C_i') \tag{7.17}$$

のように表すことできる[4]．ここで，一般に，幾本かの電流が流れている場合を想定している (和の記号 $\sum_i$ はそのことを表している)． 曲面 S 上で積分すれば，デルタ関数の性質によって，ちょうど，電流が S を貫通する点での値を拾う．$J_i = 1$ と定義しておくと，これは，ちょうど，貫く本数そのものになる．ただし，曲面を上から，貫く場合には，プラス，下から貫く場合にはマイナスと定義しておく．それ故，厳密には符号を考慮に入れた本数というべきである．ここで，C' を閉曲線にするとループ電流 C'のつくる磁場は，ビオ-サバールの法則によって，

$$\boldsymbol{H} = \int_{C'} j d\boldsymbol{l} \times \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{7.18}$$

で与えられる．この式を，式 (7.16) に代入して，それを $I(C, C')$ と記すと，

---

[3]渦糸のつくる速度場を導く位相関数は，今度は，2次元の極角に相当して3次元的な立体角で与えらる．

[4]この記号は，曲線 C_i' の上でのみ値をもつことを意味していることに注意しよう．

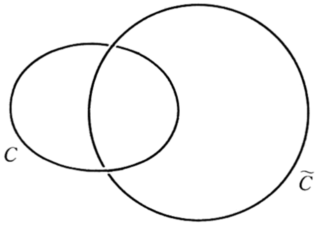


図 7.2 絡み合った 2 つの閉曲線．この図では絡み数は 1 である．

$$I(C, C') = \int_C \int_{C'} \frac{(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \cdot (d\boldsymbol{l} \times d\boldsymbol{l}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^3} \tag{7.19}$$

が得られる．つまり，$I(C, C')$ は，C と C' の絡まり具合を表す目安となるものである．これが，上の式 (7.16)，つまりガウスの絡まり数である．

次に，C, C' を渦糸に置き換えれば，式 (7.19) は，渦糸に対する絡まり数の定義を与える (渦度を電流に置き換えればよい)．$I(C, C')$ は明らかに，少々，曲線を変形しても値を変えないことは直感的に納得される．その意味で，絡まり数は位相不変量となる．このようにして定義された絡まり数は，一般的に空間中におかれた 2 本の閉曲線の間の絡まり数を定義する．例えば，高分子鎖がからまっているときの絡まり数として使える．

7.2 場の理論におけるトポロジー的粒子

場のトポロジーを考察するということは時空間から場の値のとる空間 (多様体) への写像を調べるということである．いま，場が値をとる空間として有限のもの (これをコンパクトとよぶ) を考えるとしよう．実際の問題では場はそれの従う方程式および境界条件を満たすのであるが，この方程式を導くもとになる概念は (エネルギー) 作用関数である．物理的に許容される解は場の配置のもつエネルギーが有限になるべしという規制をうけ

る．さて，有限エネルギーをもつ場の配置は空間 (時空間) 的に局在しているにがふつうである．このような場の配置は“粒子”のように振舞う．この粒子的な場の配置として現在では多くの例が知られている．特に，この配置が位相不変量で特徴づけられる場合に注目して考察することにする．具体的な問題として，2 次元平面に配置されたスピンの場を取り上げてみよう．この例では，場が有限のエネルギーをとるためには，無限の遠方において場は一定の値 (実際には 0) をとることが要求される．つまり，無限遠方において場の値は多様体の上で一点に収縮される．これを写像の言葉でいえば，場の定義域である時空の無限遠方 (無限遠点とよぶ) が，一点に写像されるということである．無限遠方というのは抽象的で考えにくい．そこで，それを一点で表す方法を用意すれば都合がよい．これは一点コンパクト化によって実現される．すでに述べたように，2 次元平面は無限遠点をつけ加えることによって球面することにできた．したがって，球面上で定義された場は，球面から球面への写像で与えられる．以下で考察するスピン場は，コンパクト化された 2 次元球面からスピン場を表す 2 次元球面への写像，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= (S_1,\, S_2,\, S_3) \\
&= (S\cos\phi\sin\theta,\, S\sin\phi\sin\theta,\, S\cos\theta) \qquad (7.20)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで，(S_1, S_2, S_3) は $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$ を満たす．以下では簡単のためにスピンの大きさは $S=1$ とおく．スピン変数をブロッホの球面上の点とし，南極からの立体射影によって複素平面 w に写像される (5 章参照．ただし，本章では ϕ の向きを逆にとっている)．それは

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{S_1 + iS_2}{S + S_3} \\
&= \mathrm{e}^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

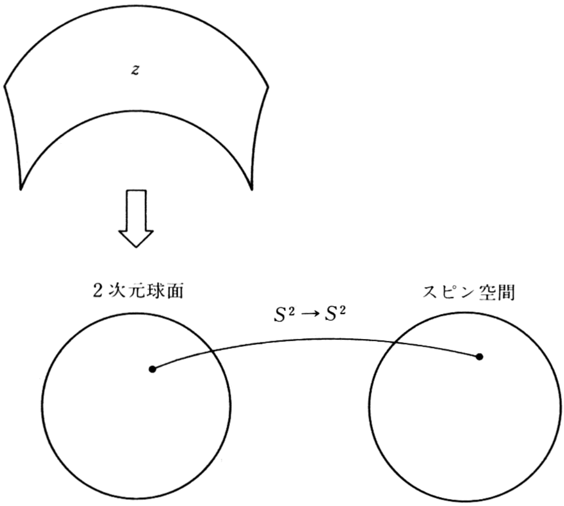


図 7.3　コンパクト化された 2 次元平面からスピン空間への写像.

のようにとるのがよい[5]．w は実部と虚部で書けば，$w = u + iv$ となる．次に，無限遠点を含む平面の点 (x, y) を複素平面 z の点とみなし，かつ，無限遠点を極点に対応させるように立体射影を構成できる．このようにして，二つの球面の間に関係がつく．さて，コンパクト化された 2 次元空間 S^2 から，場の空間 S^2 への写像を特徴づける量は 6 章で述べたように積分不変量

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint \sin\theta \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx \wedge dy \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

で与えられた．あるいは，複素変数を用いると，

$$
N = \frac{i}{2\pi}\int_{S^2} \frac{dw \wedge dw^*}{(1 + w^* w)^2}
$$

[5] この式は，南極から射影したものであるが，北極からもとれることに注意しよう．それには，$S + S_3$ を $S - S_3$ に置き換えればよい．

$$= \frac{i}{2\pi}\int_z \frac{dx \wedge dy}{(1+w^* w)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w^*}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w^*}{\partial x}\right) \tag{7.23}$$

となる[6]．スピン変数を使えば，

$$N = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, S_\alpha dS_\beta \wedge dS_\gamma$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_z \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\alpha \left(\frac{\partial S_\beta}{\partial x}\frac{\partial S_\gamma}{\partial y} - \frac{\partial S_\beta}{\partial y}\frac{\partial S_\gamma}{\partial x}\right) dx \wedge dy \tag{7.24}$$

と表せる．このように Nは明らかに S^2から S^2への写像度を表しており，整数値をとることがわかる．N が違えばトポロジー的に異なる解を与える．つまり，少し変形させただけではお互いに移り変わることはできない．この事実は，あたかも“量子数”が N に対してそれぞれの“粒子”が対応するとみることができよう．しかし，これはあくまでも古典的な解を位相不変量によって特徴づけただけで，ふつうの意味でのつまり質量とか量子数を担っているという意味での素粒子ではない．いわば“擬粒子”である．では，この擬粒子を具体的に与える w と z の間の関係あるいは，実変数の関係 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ はどうなるであろうか．それを考察するために，このスピン系のエネルギー関数を具体的に与えておく必要がある．それはハイゼンベルク型相互作用なるもので与えられる．

$$E = \int \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial y}\right)^2\right] dx \wedge dy \tag{7.25}$$

これは，w を用いて表すと，次のように書かれる．

$$E = \int \frac{4}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w^*}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$= \int \frac{4}{(1+|w|^2)^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx \wedge dy \tag{7.26}$$

[6] この式は，5 章の式 (5.41) と同じ形であることに注意．ただし，ϕ の向きを逆にとった関係上，面積要素の向きも逆になっている．

式 (7.23) を使って，エネルギーと位相不変量との差をとってみると，

$$E - 8\pi N = \int \frac{4}{(1+|w|^2)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \wedge dy \tag{7.27}$$

となる．この式は完全平方の形であるから決して負にならない．つまり，$E \geq 8\pi N$ となる．ここで，等号は

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.28}$$

のときに成立する．この関係式はコーシー-リーマンの関係式にほかならない．つまり，w が z の解析的な関数であれば満足されることになる．結局，スピン系での系のエネルギー (あるいは作用関数) を最小にする場の配置は関数論的な意味での解析関数を考えればよいということになる．特に，極値自身は位相不変量によって与えられるところがミソである．

［補　足］：エネルギー (7.25) の被積分関数は (θ, ϕ) を用いて，

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2\theta \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right]$$

と表せる．立体射影より，

$$u = \tan\frac{\theta}{2}\cos\phi, \qquad v = \tan\frac{\theta}{2}\sin\phi$$

を用いると，式 (7.26) が得られる．

8 言い残したこと

前章までの話で，学部学生の理解でき得る範囲での事柄は，一応終わったつもりであるが，“デキル”学生諸君は，物足りないと感じるかもしれない．そこで，そのような諸君のために，本章では大学院生レベルのトピックスを一つ取り上げることでフィナーレとしよう．

題材は前章までにいくつかの場所でふれたゲージ場に関するものである．特に，ベースになるのは非可換ゲージ場の場合で，それは，一言でいえばゲージ場が行列で表せるものである．一番簡単なものは2行2列の行列であるが，その場合，ヤン-ミルズ場とよばれる．以下この場合を考える(参考のために，ヤン-ミルズ場に関するメモを付録A.2につけておいた)．

話のタネは，前章でみたスピン場におけるトポロジー的特殊解と同様のものが4次元ユークリッド空間で定義されたヤン-ミルズ場の場合にも構成できるということである．4次元ユークリッド空間は4次元のミンコフスキー空間で，時間座標を虚数に変えてユークリッド化したものである．虚数の時間を考えることは，いわば，架空の世界を考えるのであるが，物理的には，量子力学的なトンネル効果を考えていることと関係している．前章のスピン場の場合では位相不変量とエネルギーとの関係が

キーポイントであったが，今回は位相不変量と作用関数が要になる．まず，4 次元ユークリッド空間におけるヤン-ミルズ場の作用関数は，

$$S = \frac{1}{2} \int_{R^4} \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^4 x \tag{8.1}$$

で与えられる．ただし，積分は 4 次元のユークリッド空間全体でなされる．これは，もちろん電磁場の場合の拡張である．ただし，場の強さ $F_{\mu\nu}$ はベクトルポテンシャル A_μ によって，次の形で与えられる (付録 A.2 参照).

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu] \tag{8.2}$$

A_μ は行列で, $A_\mu = \sum_{a=1}^{3} A_\mu^a \tau_a$ のように表せる ($\tau_a = -i\sigma_a/2$, σ_a はパウリのスピン行列). 式 (8.1) が有限であるためには，無限遠方において，$F_{\mu\nu}$ は 0 にならなければならない．これは，言い替えれば 4 次元ユークリッド空間に無限遠点を加えて，4 次元球面にコンパクト化できることを意味している．

次に，位相不変量はモノポールに付随する不変量 (6 章参照) を拡張したもので与えられることを説明しよう．この不変量は場の強さに関する微分形式 (付録 A.2 参照)

$$F = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \tag{8.3}$$

を用いて，積分

$$Q = -\int_{R^4} \mathrm{Tr}\ (F \wedge F) \tag{8.4}$$

によって定義される．この積分は，いわゆる“第 2 チャーン類”とよばれているものである．ただし，積分は 4 次元ユークリッド空間 R^4 の全体においてなされる．形式的には，モノポールの電磁場 (U(1) ゲージ場) に対する位相不変量

$$Q = \int_{S^2} F \tag{8.5}$$

の拡張となっている (これは，第 1 チャーン類とよばれている).

上で注意したように，無限遠方での場の強さ $F_{\mu\nu} \to 0$ という境界条件から，ベクトルポテンシャル A_μは，2 次元ユニタリー行列 SU(2) の要素 $g(x)$ を使って，

$$A_\mu \to g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_\mu} \tag{8.6}$$

あるいは，微分形式を用いて表すと，$A = g^{-1}dg$ と表せ，このようなゲージ場は "純ゲージ場" とよばれる (実際，この関係から，$F = 0$ がでてくることは，F に直接代入することによって確かめられる) [1]．次に

$$\mathrm{Tr}\,(F \wedge F) = d\mathrm{Tr}(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A) \tag{8.7}$$

で与えられる関係式に注目する (証明は補足を参照)．これは，物理的には電磁場に対するベクトルポテンシャルと電磁場の間の関係

$$F = dA \tag{8.8}$$

の一般化であると思っていただければよい．このことを念頭において，式 (8.7) を 4 次元ユークリッド空間内の半径 R をもった球の内部 ($V_R : |x| \leq R$) で積分を行うと，ストークスの定理が使えて，

$$\int_{V_R} \mathrm{Tr}\,(F \wedge F) = \int_{S^3} \mathrm{Tr}(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A) \tag{8.9}$$

のように 3 次元球面上の面積分に帰着する．ここで半径 R を十分大きくとると，Q はベクトルポテンシャル A_μに対する条件 (8.6) および，$F \to 0$ に注意すると，

$$Q = \frac{1}{3}\int \mathrm{Tr}\left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_\nu}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_\rho}\right)dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho \tag{8.10}$$

あるいは，微分形式で表すと，

$$Q = \frac{1}{3}\int \mathrm{Tr}(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg) \tag{8.11}$$

[1] ここで，$d(g^{-1}dg) = -g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg$ の関係に注意せよ．

と書ける．

次に，Q が S^3 から SU(2) 群の群空間への写像度を与えることを示そう．SU(2) 群の要素 g をパウリのスピン行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて表すと，

$$g = \exp\left[i\omega(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma})\right] \tag{8.12}$$

これは，動径方向 $\boldsymbol{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ を軸として，そのまわりに角度 ω の回転を表している．また g は，

$$g = I\phi_0 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}) \tag{8.13}$$

とも表せる (I は単位行列)．ここで，$(\phi_0, \boldsymbol{\phi})$ は

$$\phi_0^2 + (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}) = 1 \tag{8.14}$$

を満たす．つまり SU(2) 群の群空間は 3 次元球面と同相である．$(\phi_0, \boldsymbol{\phi})$ は上で導入した角度変数を用いて，

$$\phi_0 = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad \phi_1 = \sin\frac{\omega}{2}\sin\theta\cos\phi$$

$$\phi_2 = \sin\frac{\omega}{2}\sin\theta\sin\phi, \qquad \phi_3 = \sin\frac{\omega}{2}\cos\theta$$

とパラメトライズされる．ここで角度の取り得る範囲は，

$$0 \le \omega \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

となる[2]．$S^3 \to S^3$ の n 倍写像 g_n は次のように構成される．

$$g_n \equiv g^n = \exp[in\omega(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma})] \tag{8.15}$$

つまり，回転角 ω が n 倍されるのである．これは $S^1 \to S^1$ の n 倍写像 $z \to z^n$ の拡張であると思えばよい (6 章参照)．また，$\boldsymbol{\sigma}$ の性質より，

[2]例えば，山内恭彦，杉浦光男：連続群論入門 (培風館，1960) を参照

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{8.16}$$

を使うと，

$$g^{-1}dg = [\phi_0 I - i(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})][d\phi_0 I + i(d\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})] = i\sum_a X_a\sigma_a \tag{8.17}$$

が得られる．ここで，X_aは，

$$X_a = \phi_0 d\phi_a - \phi_a d\phi_0 + (\boldsymbol{\phi}\times d\boldsymbol{\phi})_a \tag{8.18}$$

である．式 (8.17)，(8.18) を式 (8.11) に代入し，パウリのスピン行列に関するトレース計算を行うと，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg\wedge g^{-1}dg\wedge g^{-1}dg) &= 4X_1\wedge X_2\wedge X_3\\ &= 2(1-\cos 2\omega)\sin\theta d\omega\wedge d\theta\wedge d\phi\end{aligned} \tag{8.19}$$

が得られる．n 倍写像 g_n に対しては，ω を単に n 倍すればよいだけである．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(g_n^{-1}dg_n\wedge g_n^{-1}dg_n\wedge g_n^{-1}dg_n)\\ &\qquad = 2n(1-\cos 2n\omega)\sin\theta d\omega\wedge d\theta\wedge d\phi\end{aligned} \tag{8.20}$$

そこで，角度変数の範囲に注意して積分を行うと，

$$\begin{aligned}Q &= 2n\left[\omega - \frac{1}{2n}\sin 2n\omega\right]_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\\ &= 8\pi^2 n\end{aligned} \tag{8.21}$$

が得られる．つまり， Q は，3 次元球面から SU(2) 群の群空間への写像 $x\to g(x)$ に対する写像度になっている ($\pi_3(S^3)=Z$，6 章参照)．この各整数値が，トポロジー的に，いわば，別々の“世界”をつくっている．

さて，上で導入した位相不変量で特徴づけられるゲージ場の特殊解は次のように構成できる．そのために，スピン場との類推から次式で示される完全平方の正値性

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 d^4x \geq 0 \tag{8.22}$$

を使う．ここで，$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$ は $F_{\mu\nu}$ に双対的な量である．また，ここで，$F \wedge F = F\tilde{F}/2$ と書けることに注意する (付録 A.2 参照)．式 (8.22) の左辺を展開することにより，

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})d^4x \geq \pm\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})d^4x \tag{8.23}$$

が得られる (ここで，$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$を用いた)．左辺は，ちょうどゲージ場の作用関数なので，結局

$$S \geq 8\pi^2 n \tag{8.24}$$

となる．この不等式によって，作用関数の極値が位相不変量によって評価されることになる．等号は

$$F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{8.25}$$

のときに成立する．式 (8.25) が特殊解を決定する方程式である．この特殊解は“インスタントン (instanton) ”という奇妙な名前がつけられている．ゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}$ はベクトルポテンシャルの時空変数に関する 1 階の微分で与えられているので，式 (8.25) は 1 階微分方程式となる．複合同順記号のうち，マイナス記号の方の解はインスタントン解とよばれ，プラス記号の方の解は“反 ”インスタント解とよばれる．また，写像度を表す n はインスタントン数とよばれる．このようにして，インスタントンはチャーン類という位相不変量によって特徴づけられるのである．

インスタントンという名前の由来はヤン-ミルズ場の量子力学的基底状態 (真空) の構造と関連しているところからきている．今までの議論では，4 次元ユークリッド空間の無限遠方で“ゲージ場は純ゲージ場になるべし ”という境界条件のもとに，インスタントン解の構成法を簡単に説明したが，適当なゲージ変換によって，$n = k$のインスタントン解は，インスタントン数 N

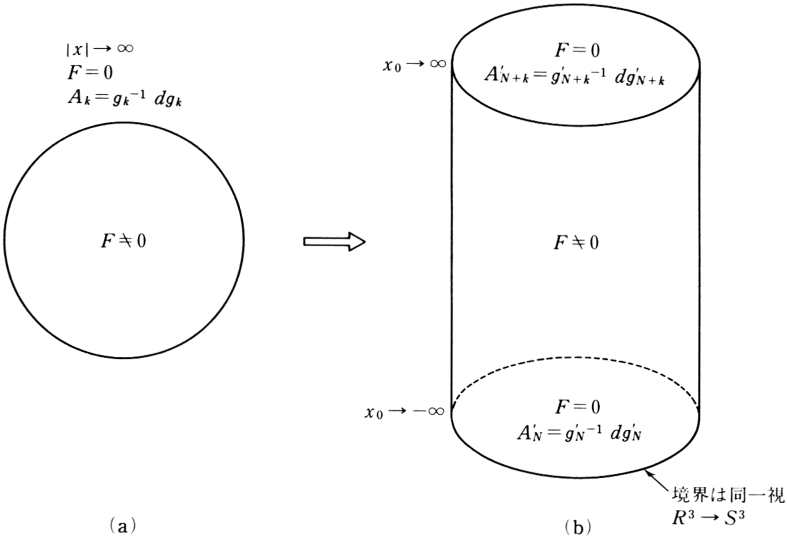


図 8.1 インスタントン解の配置の様子．(a) と (b) はゲージ変換で結ばれている．

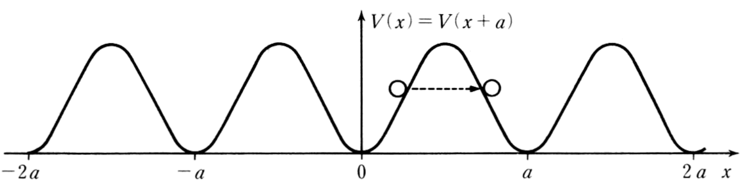


図 8.2 インスタントンによるトンネル効果．無限に縮退した真空は周期ポテンシャル中の最低エネルギー状態に対応し，図中の $x = Na$ (Nは整数)がインスタントン数 Nをもつ真空に対応する．1つの真空から別の真空への遷移はポテンシャルを“トンネル”することによって実現される．ポテンシャルの山は無限個あるので，このようなすべてのトンネル効果を重ね合わせたものが量子的真空状態となる．

$$|\psi\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N |N\rangle$$

ここで $|N\rangle$ は、インスタントン数 Nに対応する古典的真空状態である．

の真空からインスタントン数 $(N+k)$ の真空への遷移を表現したものと解釈できる (図 8.1). このように古典的真空がチャーン類で類別されるという根拠は, $x \to \pm\infty$ において 3 次元空間の無限遠方を同一視できる純ゲージ場をつくることができるので, 前述と同様, $S^3 \to S^3$の写像度によって真空を特徴づけられるからである. すなわち, 整数値で与えられる各々の位相不変量に対応してヤン-ミルズ場の真空は無限に縮退していると考えられる. しかし量子力学的には, この縮退は "トンネル効果" によって解除される可能性がある. トンネル効果は古典力学的には起こり得ない運動が, "虚の時間" では起こり得るという典型的な量子効果である. これが時間の座標を虚にした 4 次元ユークリッド空間を考えた理由である. 実際の物理系のように時間的経過をたどらないで, ある意味で "瞬間的" に出現するという意味でこのような場の配位はインスタントンと命名された (のであろう).

以上が, いわゆる, 通称インスタントンといわれているもののアウトラインであるが, 文字通りアウトライン以上のものではない. もっと深く知りたい読者は, 例えば次の優れたテキスト：T.Eguchi, P.B.Gilkey and A.J.Hansen : Physics Report **66**(1980)213 によって勉学されたい.

［補　足］: $\mathrm{Tr}(F\wedge F) = d\mathrm{Tr}(A\wedge F - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A)$ の証明.

$$F\wedge F = (dA + A\wedge A)\wedge(dA + A\wedge A)$$

$$= dA\wedge dA + A\wedge A\wedge dA + dA\wedge A\wedge A + A\wedge A\wedge A\wedge A$$

トレースをとるとき, $\mathrm{Tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A) = 0$ に注意する (これは, トレースの循環公式と外積をとるときの順序の入れ換えに対する符号変化に注意すれば得られる). また,

$$d\mathrm{Tr}(A\wedge dA) = \mathrm{Tr}(dA\wedge dA)$$

および, $dA = F - A\wedge A$ より,

$$d(A \wedge A \wedge A) = dA \wedge A \wedge A + A \wedge dA \wedge A + A \wedge A \wedge dA$$

および，そのトレースをとったときの関係式

$$d\mathrm{Tr}(A \wedge A \wedge A) = 3\mathrm{Tr}(A \wedge A \wedge dA)$$

これらの式をまとめると目標の等式が得られる.

A　付　　録

A.1　微分形式の一般的考察

微分形式の積分に関する公式を多次元の場合に一般化しておく．n 次元空間(局所的にユークリッドとする)の座標を，$(x_1, \cdots, x_n)$ とし，それの微分を $(dx_1, \cdots, dx_n)$ とする．外積は 3 次元の場合と同じく，

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{A.1}$$

を満たすように定義する．これは 3 次元の外積を拡張したものにほかならない．特に，$dx_i \wedge dx_i = 0$ となる．これを一般に

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \mathrm{sgn}(i_1, \cdots, i_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \tag{A.2}$$

表される．ここで，$\mathrm{sgn}(i_1, \cdots, i_k)$ は，$(1, \cdots, k)$ の順列で偶順列のときは，$+1$ を，奇順列のときは，-1 を与える．これらの性質から，$(dx_1, \cdots, dx_n)$ から，生成される独立な微分形式は，全部で 2^n 個ある．それらは微分形式の次数で分類され，それぞれの基底は，

1　;　0 形式

$dx_1, \cdots, dx_n$　;　1 形式

$$dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, \cdots, dx_{n-1} \wedge dx_n \quad ; \quad 2\text{形式}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad ; \quad n\text{形式}$$

で与えられる．p 形式の独立な個数は，n 個のものから p 個のものをとりだす組み合わせの数

$$_nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{A.3}$$

だけある．したがって，一般の p 形式はこれらの 1 次結合で与えられる．

$$\omega_p = \sum_{i_1 \cdots i_p} \phi_{i_1 \cdots i_p}(x_1 \cdots x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{A.4}$$

この ω_p より，外微分によって，$(p+1)$ 形式をつくることができる．2 形式を例にとると，その 3 形式は

$$d(\sum_{ij} f_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \sum_{kij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \tag{A.5}$$

によって与えられる．

最後に，外微分の重要な性質を二つあげておく．

[1]

$$dd\omega = 0 \tag{A.6}$$

これは，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \tag{A.7}$$

および，式 (A.1) より得られる．

[2]

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q \tag{A.8}$$

この証明は微分の定義に従えばできる．

A.2　ゲージ場に関するメモ

非可換ゲージ場についての基本事項を本書に関係する部分のみを列挙する．以下では，2 次元ユニタリー群 (SU(2)) のゲージ

場，つまり，ヤン-ミルズ場を主として扱う．

A.2.1 ヤン-ミルズ場のゲージ変換

まず，ベクトルポテンシャル A のゲージ変換は

$$A_i' = T^{-1}A_iT + T^{-1}\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{A.9}$$

で与えられる．ここで，T は2次元ユニタリー行列である．2×2 のユニタリー行列はパウリのスピン行列σ_aを用いて表せることに注意すれば，ゲージ場は次のように表せる．

$$A_i = \sum_{a=1}^{3} A_i^a \tau_a \qquad (\tau_a = -\frac{i\sigma_a}{2}) \tag{A.10}$$

これは，形式的には，τ_a を基底とするベクトル空間での "ベクトル" とみなすことができる．

電磁場に相当する量は，

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + [A_i, A_j] \tag{A.11}$$

によって与えられる． 第1，2項は電磁場(可換ゲージ場)の場の強さに対応するものであるが，最後の項があらわれるのが電磁場の場合とは決定的に異なる非可換ゲージ場の特性である．これが現れる理由はここではページ数の制約で述べることができないので専門書にまかせることにする．τ 行列の交換関係が，

$$[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc}\tau_c \tag{A.12}$$

を満たすことに注意すると(ϵ_{abc} はレビ-チビタ記号である)，交換子の部分は

$$[A_i, A_j] = \sum_{abc} \epsilon_{abc} A_i^a A_j^b \tau_c \tag{A.13}$$

となり，F_{ij}の成分 $F_{ij}^c(F_{ij} = \sum F_{ij}^c \tau_c)$ は，

$$F_{ij}^c = \frac{\partial A_i^c}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j^c}{\partial x_i} + \sum_{abc} \epsilon_{abc} A_i^a A_j^b \tag{A.14}$$

のように求められる．

また，場の強さ F のゲージの変換は

$$F = T^{-1} F T \tag{A.15}$$

で与えられる．

A.2.2 微分形式によるゲージ場の記述

以下では4次元時空で考えことにするので，時空座標を $x_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ と表す．ただし，x_0 は時間座標である．

ベクトルポテンシャル A，場の強さ F は

$$A = \sum_\mu A_\mu dx_\mu \tag{A.16}$$

$$F = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \tag{A.17}$$

で与えられる．$U(1)$ ゲージ場では，$F = dA$ なる関係があるので，F は簡単に，

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu \tag{A.18}$$

で与えられる．ヤン-ミルズ場の場合には，F は

$$F = dA + A \wedge A \tag{A.19}$$

で与えられる．ただし，A_μ は行列の値をもった微分形式である．右辺の第2項は

$$A \wedge A = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} [A_\mu, A_\nu] dx_\mu \wedge dx_\nu \tag{A.20}$$

となるので(ここで，$[A_\mu, A_\nu] = A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu$ および $dx_\mu \wedge dx_\nu = -dx_\nu \wedge dx_\mu$ の関係を使う)，F は

$$F = \frac{1}{2} \left[\sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) + [A_\mu, A_\nu] \right] dx_\mu \wedge dx_\nu \tag{A.21}$$

となる.

次に，F に双対な微分形式を

$$\tilde{F} = \sum_{\rho\sigma} \frac{1}{2} \tilde{F}_{\rho\sigma} dx_\rho \wedge dx_\sigma \tag{A.22}$$

によって定義する．ここで，$\tilde{F}_{\rho\sigma}$ は

$$\tilde{F}_{\rho\sigma} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{A.23}$$

である．また，式 (A.2) と

$$\begin{aligned} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho \wedge dx_\sigma &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} d^4 x \end{aligned} \tag{A.24}$$

を用いると

$$F \wedge F = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^4 x \tag{A.25}$$

となり，F と $\tilde{F}$ が双対な微分形式の関係にあることがわかる．

A.2.3 ヤン-ミルズ場の作用関数

ヤン-ミルズ場はパウリのスピン行列を用いて表されるので，エネルギー (作用関数) などの物理量は行列からつくられるスカラー量で与える必要がある．それは，トレースをとることによって実現される．特に，パウリのスピン行列に対するトレースは次のようになる．

$$\mathrm{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab} \tag{A.26}$$

これから，$A = \sum A_a \tau_a, B = \sum B_a \tau_a$ とすると，

$$\mathrm{Tr}(AB) = -\frac{1}{2} \sum_a A_a B_a \tag{A.27}$$

が得られる．

ヤン-ミルズ場の作用関数は，

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}} &= \int \mathrm{Tr}(F \wedge \tilde{F}) \\
&= \int \sum -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} d^4x
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

によって与えられる．この表式は電磁場の作用関数

$$
S_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) d^4x \tag{A.29}
$$

の一般化である．式 (A.28) における最後の等式は，式 (A.27) より得られる．

参考文献

本書の作成に際して参考にさせていただいたテキストをあげておく．

[1] 長野正：曲面の数学 (培風館，1968).

[2] 本間龍雄，岡部恒治：微分幾何とトポロジー入門 (新曜社，1979).

[3] 伊藤光弘，茂木勇：微分幾何学とゲージ場理論 (共立出版，1986).

トポロジーを場の理論の高度な概念に応用したものについての専門書は多くみられるが，初心者が近づけるものは少ないようである．以下，各章に関連して，さらに進んで勉学しようと試みる諸君が参考にされるのがよいと思う文献をあげておく．

2章

[1] フランダース (岩堀長慶訳) ： 微分形式の理論 (岩波書店，1967).

[2] 岩堀長慶：ベクトル解析 (裳華房，1960).

3章

[1] 大貫義郎：物理学最前線，Vol.9(1985)1.

また，オリジナルな文献として，

[2] A.Inomata and V.Shingh : J. Math. Phys. **19**(1978)2318.

これらは本書で詳しく触れなかったアハラノフ-ボーム効果に関するユニークな文献である.

4 章

[1] M.V.Berry : Physics Today, Vol.43, No.6(1990)34. (邦訳：パリティ, Vol.6, No.6(1991))

[2] 倉辻比呂志：パリティ, Vol.3, No.9(1988)26；日本物理学会誌, Vol.47(1992)447.

[3] F.Wilczek and A.Shapere : Geometric Phases in Phyisics (World Scientific, Singapore, 1989).　これは幾何学的位相に関する代表的と思われるオリジナル文献を収録した論文選集.

5 章

[1] 藤原大輔：線形偏微分方程式論における漸近的方法 (岩波書店, 1976). これは, いわゆる WKB 理論の一般理論を数学的に展開したもので, 高度ではあるが優れたテキストである.

[2] J.B.Keller : Ann. Phys. **4**(1958)180.　本書では述べられなかったが, この文献において, 多次元の準古典量子化の公式がはじめて与えられた.

6 章

[1] T.Eguchi, P.B.Gilkey and A.J.Hansen : Physics Report **66** (1980)213.　微分幾何学を用いてゲージ場理論をファイバーバンドル, 特性類の観点から本格的に説きおこした名著.

[2] D.Mermin : Rev. Mod. Phys. **51**(1979)591.　凝縮物質系の欠陥 (defect) に関するトポロジーの解説.

7, 8 章

[1] Rajaraman : Soliton and Instanton (North Holland, 1983). この本はインスタントンやソリトンに関連した高度な内容を含む優れたテキストであるが, ある程度進んだ読者向きであると思う.

索　　　引

あ　行

か　行

さ　行

た 行

な 行

は 行

ま　行

や　行

ら　行

著者略歴

1967 年　京都大学理学部物理学科卒業.
1972 年　京都大学大学院理学研究科物理学第 2 専攻博士課程修了.
1985 年　立命館大学理工学部助教授.
1987 年　同教授.
現在に至る. 理学博士.

パリティ物理学コース　クローズアップ
トポロジーと物理

平成 7 年 3 月 25 日　発　　行
平成 9 年 10 月 10 日　第 2 刷発行

著作者　倉 辻 比 呂 志

発行者　鈴 木 信 夫
出版事業部 深山恒雄

発行所　丸 善 株 式 会 社

出版事業部　〒103 東京都中央区日本橋三丁目 9 番 2 号
編集部　電話(03) 3272-0512／FAX(03) 3274-0581
営業部　電話(03) 3272-0521／FAX(03) 3274-0551
郵便振替口座　00170-5-5

組版印刷・三美印刷株式会社／製本・交通製本株式会社

ISBN 4-621-04045-6 C3342　　Printed in Japan